БИБЛИОТЕКА УЧИТЕЛЯ И ШКОЛЬНИКА

АЛГЕБРА ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И АБИТУРИЕНТОВ

И.А. ВЕСЕЛАГО

УДК 512
ББК 22.141я721.6
В 38

Веселаго И. А. **Алгебра для школьников и абитуриентов.** — 2-е изд., испр. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 336 с. — ISBN 978-5-9221-0789-1.

Перед Вами учебное пособие, в котором ясно, четко и наглядно изложен школьный курс алгебры. Структура пособия позволяет быстро найти и надежно закрепить в памяти нужную информацию. Данное издание поможет школьникам старших классов успешно подготовиться к выпускным экзаменам в общеобразовательной школе и к вступительным экзаменам в вузы. Книгой могут воспользоваться учителя и родители школьников, а также все, кто интересуется математикой.

ISBN 978-5-9221-0789-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Применение математики и ее приложений давно стало необходимым этапом исследований в экономике, технике, физике, и даже гуманитарные области деятельности человека не обходятся без применения математического аппарата. Информатизация и компьютеризация всех без исключения сфер деятельности человека также невозможны без математики.

Строгий логический подход, а математика сильна именно логикой рассуждений, а не только умением быстро считать, помогает получить существенные результаты там, где простое описание явлений не приносит успеха. Математика — царица наук, и этим все сказано. Математические знания недаром были существенной частью культуры различных народов. Математика всегда бурно развивалась там, где развивалось общество. Люди строили дома, мосты, корабли, создавали различные механизмы, календари, вели астрономические наблюдения. Математические знания для этого были жизненно необходимы. В наше время математика нужна еще более, чем раньше. Математика очень интересна, дает пищу уму, развивает логическое мышление, учит рассуждать и достигать своей цели. Математика, по словам М. В. Ломоносова, «... ум в порядок приводит». Поэтому знать математику престижно и важно.

Помимо сказанного, существует и практическая проблема — сдача экзамена по математике в школе и вступительного экзамена в вуз. При поступлении в вуз — это, пожалуй, самое серьезное и сложное испытание.

Изучение математики начинается в младших классах школы, и постепенно «математическое здание» усложняется и расширяется. Без базы, заложенной в начальной школе при изучении чисел и действий над ними, невозможно понимание алгебры, а затем и математического анализа. Без изучения простейших геометрических фигур не будет понимания более сложных геометрических построений.

Цель предлагаемого пособия — помочь учащимся систематизировать свои знания по математике как в теории, так и в практике. Знания теории, то есть формул, правил, теорем, далеко не всегда достаточно для правильного решения задач. А ведь именно это требуется на письменном экзамене по математике.

Для того чтобы получить исчерпывающее, логически верное и грамотно изложенное решение задачи, необходимо умение выбрать нужную теоретическую основу и успешно ее применить. Для этого нужно владеть методами решения задач в различных областях математики. Многие методы являются комплексными, использующими аппарат нескольких разделов математики. Так, геометрические задачи часто решаются с помощью алгебраических и тригонометрических методов, при решении уравнений используются графики, тригонометрические преобразования во многом основываются на алгебраических формулах и т. д.

Очень важно владеть логикой математических рассуждений и уметь применять теоретические знания при решении задач. Это и является самым сложным, так как гораздо труднее видеть сущность задачи, ее внутреннюю логику, чем запомнить отдельные формулировки или выполнить действия по определенному известному алгоритму.

Цель этой книги состоит также в преодолении разрыва между теорией и практическим решением задач. Каждый теоретический раздел сопровождается не только примерами, но и большим количеством решенных задач, в том числе нестандартных. Следует подчеркнуть, что только активное владение всеми средствами элементарной математики создает возможности для появления оригинальных идей при решении сложных задач. Задачи, как правило, располагаются по мере возрастания их сложности. Стоит попробовать сначала решить их самостоятельно и только в случае неудачи после нескольких попыток смотреть приведенное решение.

Книга предназначена для учащихся средних школ и абитуриентов и в полном объеме содержит понятия, определения, формулы, теоремы и методы решения задач, входящие в курс математики средней школы. Кроме того, в справочнике имеются подробно разобранные задачи и примеры, в решении которых используется не только материал того раздела, к которому относится пример или задача, но и материал других разделов. Следует отметить, что не всегда приводятся самые короткие решения, так как наиболее важным для автора было донести логику решения и последовательность действий для получения нужного результата. Мы не стали выделять информацию для абитуриентов отдельной главой, посчитав, что для поступающих удобнее будет воспользоваться примерами экзаменационных задач в конце соответствующих разделов справочника.

Эта книга ни в коей мере не является учебником по элементарной математике и не заменяет школьные учебники, но помогает получить всю необходимую информацию в более компактном виде, чем в учебнике.

Книга нужна, чтобы активизировать знания, и будет полезна при:

1) нахождении нужных понятий, формул, теорем;

2) повторении материала к экзамену, зачету, контрольной работе;

3) решении типовых и нестандартных задач курса математики;

4) подготовке к вступительному экзамену по математике в вузы и другие учебные заведения.

Числа, числовые и алгебраические выражения

Число — это важнейшее математическое понятие. В математике некоторые понятия являются первичными, неопределяемыми. К ним относятся понятия натурального числа, точки, прямой и т. д. **Натуральные числа** — это числа, используемые для счета предметов: 1, 2, 3, ..., n, ...

Другим фундаментальным понятием математики является понятие множества. Принято говорить, что **множество** объединяет элементы по какому-либо признаку. Множества можно составлять из самых разнообразных объектов на основе различных признаков. Элементами множества могут быть как материальные объекты, так и абстрактные понятия, такие как числа, геометрические фигуры, символы и т. п. Если в роли элементов множества выступают числа, то оно называется *числовым множеством*. Множества чаще всего обозначаются большими латинскими буквами A, B, C, ..., а их элементы — малыми латинскими буквами a, b, c, ... Если множество A состоит из k элементов a_1, a_2, ..., a_k, то пишут $A = \{a_1; a_2; \ldots; a_k\}$.

Если элемент a принадлежит множеству A, то пишут $a \in A$.

Множество, которое не содержит элементов, называется *пустым* и обозначается $\varnothing$.

Пересечением множеств A и B называется множество C, которое состоит из элементов, входящих и в множество A, и в множество B, обозначается $C = A \cap B$. *Объединением множеств* A и B называется множество C, состоящее из всех элементов множеств A и B и только из них, обозначается $C = A \cup B$.

Множество натуральных чисел обозначают буквой N. Если какое-либо число n принадлежит множеству натуральных чисел, пишут $n \in N$.

На множестве натуральных чисел определены операции сложения и умножения. Сумма и произведение натуральных чисел — также натуральные числа.

Вычитание натуральных чисел приводит не только к натуральным числам, но и к числам вида $(-n)$, где n — натуральное число. Множество чисел, состоящее из натуральных чисел, нуля и чисел вида $(-n)$, называется множеством **целых чисел** и обозначается Z. На множестве целых чисел определены операции сложения, вычитания и умножения. Деление целых чисел выводит нас за рамки этого множества, т. к. при делении результат не всегда оказывается целым числом, и возникает необходимость записи чисел, более «мелких», чем целые. Одна или несколько равных частей единицы называется *обыкновенной дробью*.

Обыкновенная дробь состоит из числителя и знаменателя, разделенных чертой, например $\frac{7}{9}$. Знаменатель 9 обозначает, что нечто целое разделено на 9 частей, а числитель 7, что взято 7 таких частей.

Важнейшим свойством дроби является то, что числитель и знаменатель дроби можно разделить на одно и то же число, т. е. дробь можно сократить. Например, $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$; $\frac{6}{42} = \frac{1}{7}$.

Дробь, у которой числитель меньше знаменателя, называется *правильной*.

Если числитель дроби больше знаменателя, дробь — *неправильная*. $\frac{3}{5}$ — правильная дробь, $\frac{5}{3}$ — неправильная дробь. Из неправильной дроби можно выделить целую часть, разделив числитель на знаменатель с остатком. Частное от деления будет целой частью числа, остаток — числителем дробной части, в знаменателе будет знаменатель неправильной дроби. Например, $\frac{43}{9} = 4\frac{7}{9}$; $\frac{57}{8} = 7\frac{1}{8}$.

Число, состоящее из целой и дробной частей, — дробное число. Такое число можно превратить в неправильную дробь. Для этого нужно умножить целую часть на знаменатель дроби и добавить это произведение к числителю, а знаменатель оставить прежним. Например, $6\frac{3}{4} = \frac{27}{4}$; $3\frac{11}{13} = \frac{50}{13}$. Над дробями можно совершать арифметические действия по следующим правилам:

1) $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + pn}{nq}$; 2) $\frac{m}{n} - \frac{p}{q} = \frac{mq - pn}{nq}$;

3) $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}$; 4) $\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{mq}{np}$.

Примеры

1. $\frac{1^{\llcorner 9}}{2} - \frac{1^{\llcorner 2}}{9} = \frac{9 - 2}{18} = \frac{7}{18}$.

2. $1\frac{7}{85} + 6\frac{2}{17} = \frac{92^{\llcorner 1}}{85} + \frac{104^{\llcorner 5}}{17} = \frac{92 + 520}{85} = \frac{612}{85} = 7\frac{17}{85} = 7\frac{1}{5}$.

3. $\frac{1}{10} \cdot \frac{5}{13} = \frac{1 \cdot \cancel{5}}{{}_2\cancel{10} \cdot 13} = \frac{1}{26}$.

4. $\frac{3}{84} : \frac{7}{20} = \frac{3 \cdot \cancel{20}^5}{{}_{21}\cancel{84} \cdot 7} = \frac{15}{147} = \frac{5}{49}$.

Дроби со знаменателями 10, 100, 1000 и т. д. называются **десятичными дробями** и записываются $\frac{1}{10} = 0{,}1$; $\frac{7}{100} = 0{,}07$; $7\frac{3}{10} = 7{,}3$.

При сложении и вычитании десятичных дробей числа записывают так, чтобы одинаковые разряды были записаны один под другим, а запятая — под запятой. Например,

$$+\begin{array}{r}0{,}132\\ \underline{3{,}541}\\ 3{,}673\end{array}; \qquad -\begin{array}{r}9{,}2072\\ \underline{2{,}45}\\ 6{,}7572\end{array}.$$

При умножении десятичных дробей надо выполнить это действие, не обращая внимания на запятые, а затем в полученном произведении отделить справа запятой столько цифр, сколько их стоит после запятой в обоих множителях вместе.

При делении десятичных дробей на натуральное число делим сначала целую часть числа на это натуральное число, затем десятые, сотые и т. д. доли. Если целая часть меньше делителя, то в целой части частного получим 0. Например, $4{,}52 : 2 = 2{,}26$; $1{,}28 : 4 = 0{,}32$.

При делении на десятичную дробь надо в делимом и делителе перенести запятую вправо на столько цифр, сколько их после запятой в делителе, и затем делить на натуральное число.

Можно преобразовать десятичную дробь в обыкновенную и, обратно, обыкновенную дробь в десятичную. Для первого преобразования достаточно в числителе дроби записать число, стоящее после запятой, а в знаменателе — единицу с нулями, причем нулей должно быть столько, сколько цифр справа от запятой. Например, $0{,}3 = \frac{3}{10}$; $0{,}45 = \frac{45}{100}$; $0{,}008 = \frac{8}{1000}$.

Чтобы совершить обратное преобразование, следует разделить числитель на знаменатель по правилу деления десятичной дроби на целое число. Например,

$$\begin{array}{r|l} -6{,}0 & 25 \\ \cline{2-2} \underline{5\ 0} & 0{,}24 \\ 100 & \end{array}$$

т. е. $\frac{6}{25} = 0{,}24$.

Отметим, что при этом может получиться бесконечная десятичная дробь. Например,

$$\begin{array}{r|l} -5{,}0 & 9 \\ \cline{2-2} \underline{4\,5} & 0{,}55\ldots; \\ 50 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -4{,}0 & 7 \\ \cline{2-2} \underline{3\,5} & 0{,}5714285\ldots. \\ -50 & \\ \underline{49} & \\ -10 & \\ \underline{7} & \\ -30 & \\ \underline{28} & \\ -20 & \\ \underline{14} & \\ -60 & \\ \underline{56} & \\ -40 & \\ \underline{35} & \\ 50 & \end{array}$$

Бесконечная десятичная дробь, в которой, начиная с некоторого разряда, цифры повторяются, называется *периодической*. Записываются периодические дроби следующим образом: $0{,}333\ldots = 0{,}(3)$; $0{,}5757\ldots = 0{,}(57)$.

Важно уметь переводить периодические дроби в обыкновенные. Для того чтобы обратить бесконечную периодическую десятичную дробь в обыкновенную, надо из числа, стоящего до 2-го периода, вычесть число, стоящее до 1-го периода, и сделать эту разность числителем, а в знаменателе написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде, и после девяток дописать столько нулей, сколько цифр между запятой и 1-м периодом.

Например, $0{,}11(7) = \dfrac{117-11}{900} = \dfrac{106}{900} = \dfrac{53}{450}$;

$0{,}(37) = \dfrac{37-0}{99} = \dfrac{37}{99}$;

$13{,}74(331) = 13\dfrac{74\,331-74}{99\,900} = 13\dfrac{74\,257}{99\,900}$.

Рациональными называются числа, которые могут быть представлены в виде $\dfrac{p}{q}$, где p — целое, а q — натуральное число. Множество рациональных чисел обозначается Q. Любое рациональное число может быть представлено в виде конечной либо бесконечной периодической десятичной дроби.

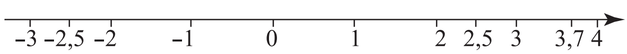
На множестве рациональных чисел определены операции сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в натуральную степень, т. к. последняя операция сводится к умножению: $a^n = \underbrace{a\,a\,a\,a \ldots a}_{n \text{ раз}}$.

Возведение в отрицательную целую степень возможно для любого рационального числа, кроме 0, т. к. $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$, а на 0 делить нельзя.

Прямую линию с выбранными на ней началом отсчета, единичным отрезком и направлением называют *числовой прямой*, или *числовой осью*.

Два числа, отличающиеся друг от друга только знаком, называются *противоположными*. Например, 5 и -5; 1,7 и $-1{,}7$.

Каждому рациональному числу соответствует единственная точка на числовой прямой. Противоположные числа на числовой прямой расположены симметрично относительно нуля.



Модулем (абсолютной величиной) числа a называется само это число, если $a \geqslant 0$, и противоположное число $-a$, если $a < 0$.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

На числовой прямой $|a|$ означает расстояние от точки, соответствующей числу a, до точки, обозначающей 0.

$|0| = 0$; если $a \neq 0$, то на числовой прямой находятся две точки, равноудаленные от нуля, соответствующие $|a|$, это a и $-a$.

На числовой прямой правее расположено то из двух чисел, которое больше. Поэтому любое положительное число больше нуля и больше отрицательного числа; любое отрицательное число меньше нуля; из двух отрицательных чисел больше то, модуль которого меньше. Например, $-0{,}3 > -1{,}5$; $-7{,}21 < -2{,}4$.

Сумма двух рациональных чисел с одинаковыми знаками равна числу того же знака, модуль которого равен сумме модулей слагаемых. Сумма двух чисел с разными знаками равна числу, модуль которого равен разности большего и меньшего модулей этих чисел, а знак суммы совпадает со знаком того слагаемого, модуль которого больше.

Например, $(-5) + (-1{,}7) = -6{,}7$; $(-2{,}6) + (+4{,}2) = 1{,}6$; $(-72{,}1) + (+50) = -22{,}1$.

Разности двух рациональных чисел соответствует сложение уменьшаемого с числом, противоположным вычитаемому.

Например, $10 - (-5) = 10 + 5 = 15$; $-16{,}2 - (+2{,}1) = -16{,}2 + (-2{,}1) = -18{,}3$.

Произведение и частное двух рациональных чисел одного знака является положительным числом, произведение и частное двух чисел с разными знаками — число отрицательное.

Итак, множество N натуральных чисел было расширено при введении нуля и чисел $(-n)$ до множества Z целых чисел, и затем при введении дробных чисел до множества Q рациональных чисел. Однако существуют алгебраические и геометрические задачи, которые не имеют решения на множестве рациональных чисел. Например, нельзя выразить рациональным числом длину диагонали квадрата со стороной 1 см; нельзя найти отношение длины окружности к диаметру.

Числа, которые нельзя представить в виде $\frac{p}{q}$ и которые поэтому не являются рациональными, называются **иррациональными**. Т. к. любое рациональное число представляется либо в виде конечной, либо бесконечной периодической десятичной дроби, то иррациональное число может быть представлено в виде бесконечной непериодической десятичной дроби.

Рациональные и иррациональные числа вместе составляют множество **действительных чисел**, которое обозначается буквой R.

Итак, вся числовая прямая представляет собой множество действительных чисел, состоящее из рациональных и иррациональных чисел. Множество рациональных чисел включает в себя множество целых чисел и множество дробных чисел, множество целых чисел включает в себя множество натуральных чисел и множество противоположных им чисел.

На числовой прямой вводятся обозначения для *числовых промежутков*:

$[a; b]$ — отрезок (замкнутый промежуток) с началом a и концом b;

$(a; b)$ — интервал (незамкнутый промежуток);

$[a; b)$ и $(a; b]$ — полуинтервалы (полузамкнутые промежутки);

$(-\infty; b]$ и $[a; +\infty)$ —лучи, где $\pm\infty$ — обозначение бесконечности; часто вместо $+\infty$ пишут просто ∞;

$(-\infty; \infty) = R$ — вся числовая прямая.

Если число x входит в какой-либо числовой промежуток, то пишут $x \in (a; b)$ или $x \in (-\infty; b)$.

Законы сложения и умножения чисел

1) $a + b = b + a$ (переместительный закон сложения);

2) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (сочетательный закон сложения);

3) $ab = ba$ (переместительный закон умножения);

4) $(ab)c = a(bc)$ (сочетательный закон умножения);

5) $(a + b)c = ac + bc$ (распределительный закон сложения относительно умножения).

Вернемся к натуральным числам и поговорим о делимости чисел. *Разделить* натуральное число n на натуральное число k — значит найти такое натуральное число a, при котором $n = ka$. В этом случае говорят, что n нацело делится на a. Число a называется *делителем* числа n, а число n называется *кратным* числа k.

Натуральные числа бывают простые и составные. Натуральное число называется *простым*, если оно не имеет делителей, кроме 1 и самого себя. Все остальные натуральные числа, кроме 1, *составные*. Они могут быть разложены на простые множители, т. е. представлены в виде произведения простых множителей. Например, 5, 7, 13, 29 — простые числа, 6, 18, 33, 45 — составные числа: $6 = 2 \cdot 3$; $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$; $33 = 3 \cdot 11$; $45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$. Число 1 не относят ни к простым, ни к составным числам.

Разложение составного числа на простые множители является для него единственно возможным.

Натуральные числа, делящиеся на 2, называются *четными*, не делящиеся на 2 — *нечетными*.

Признак делимости на 2: число делится на 2, если его последняя цифра четная или 0.

Признак делимости на 3: число делится на 3, если сумма его цифр делится на 3.

Признак делимости на 4: число делится на 4, если две его последние цифры либо нули, либо образуют число, делящееся на 4.

Признак делимости на 5: число делится на 5, если его последняя цифра либо 0, либо 5.

Признак делимости на 9: число делится на 9, если сумма его цифр делится на 9.

Признак делимости на 10: число делится на 10, если его последняя цифра 0.

Любое четное число a может быть записано как $a = 2k$, любое нечетное число b как $b = 2k - 1$, где $k \in N$.

Если несколько натуральных чисел делятся на одно и то же число, то это число называется их *общим делителем*. Наибольшее из таких чисел называется *наибольшим общим делителем* (НОД). Если наибольший общий делитель чисел равен 1, то такие числа называются *взаимно простыми*. *Наименьшим общим* *кратным* (НОК) нескольких натуральных чисел называется наименьшее число, которое делится на каждое из данных чисел.

Для отыскания НОД двух чисел можно сделать следующее:

1) разложить каждое из чисел на простые множители;

2) найти произведение одинаковых простых множителей, входящих и в то, и в другое разложения. Например, даны числа 180 и 120. Найти НОД этих чисел.

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \text{НОД} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60.$$

Для нахождения НОК двух чисел можно выполнить следующее:

1) разложить каждое из чисел на простые множители;

2) найти произведение всех различных простых множителей, входящих в оба разложения.

Например, найти НОК чисел 180 и 140.

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 140 & 2 \\ 70 & 2 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \\ & \end{array} \qquad \text{НОК} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 1260.$$

Запись $a : b$, или $\frac{a}{b}$ называется *отношением* числа a к числу b.

Равенство двух отношений $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $bd \neq 0$ называется **пропорцией**, а числа a, b, c, d — членами пропорции, при этом числа a и d считаются крайними членами пропорции, а числа b и c — средними членами пропорции. Основное свойство пропорции: $ad = bc$, т. е. произведение крайних членов пропорции равно произведению средних ее членов.

Если $abcd \neq 0$, то из пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ можно получить еще три пропорции: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$; $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$; $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$. Отношения величин и пропорции часто используются при решении задач. Например, решить уравнение:

$$\frac{x^2-2x+4}{x-2}=\frac{5+x^2+5x}{x+5}.$$

Пользуясь свойством пропорции и учитывая, что $x \neq 2$ и $x \neq -5$, запишем: $(x^2-2x+4)(x+5)=(5+x^2+5x)(x-2) \Rightarrow$ $\Rightarrow \cancel{x^3}-\cancel{2x^2}+4x+\cancel{5x^2}-\cancel{10x}+20=5x+\cancel{x^3}+\cancel{5x^2}-10-\cancel{2x^2}-$ $-\cancel{10x} \Rightarrow x=30$.

Процентом данного числа a называется его сотая часть. Следовательно, само число составляет сто процентов. Один процент обозначается символом 1%.

Например, 45% числа 50 есть $50\cdot\frac{45}{100}=22{,}5$; 30% числа 200 есть $\frac{30}{100}\cdot 200=60$. В дальнейшем мы увидим, что проценты, процентные соотношения часто используются при решении задач.

На множестве действительных чисел определено понятие степени.

Степенью a^m, где $a \in R$, $m \in Z$ (степень с целым показателем) называется число, определяемое правилами:

1) $a^0=1$, $a \neq 0$;

2) $a^m=\underbrace{aaa\ldots a}_{m\ \text{сомножителей}}$, если $m \in N$;

3) $a^{-k}=\frac{1}{a^k}$, $a \neq 0$, $k \in N$,

где a — основание степени;

n, m, k — показатели степени.

Понятие степени с рациональным показателем связано с понятием арифметического корня n-й степени из числа a при $a \geqslant 0$. Число b называется *арифметическим корнем* n-й степени из неотрицательного числа a, если $b^n=a$. Обозначается $b=\sqrt[n]{a}$; $n \geqslant 2$, $n \in N$. $\sqrt[n]{a} \geqslant 0$; $\sqrt[n]{0}=0$; $\sqrt[n]{1}=1$. Например, $\sqrt{25}=5$; $\sqrt[3]{27}=3$; $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}=\frac{2}{3}$.

Свойства арифметических корней: при $a>0$, $b>0$, n, $k \in N$, $n \geqslant 2$; $k \geqslant 2$:

1) $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$; 3) $\sqrt[n]{a}=\sqrt[nk]{a^k}$;

2) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; 4) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$;

5) $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$; 7) $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[k]{a} = \sqrt[nk]{a^{n+k}}$;

6) $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$; 8) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a^{n-k}}$.

Степенью числа a $(a > 0)$ *с рациональным показателем* $\dfrac{p}{q}$ называется арифметический корень степени q из a^p, т. е. $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$. Если $\dfrac{p}{q} > 0$ и $a = 0$, то $a^{\frac{p}{q}} = 0$. Из определения следует: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$. Например, $3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{3^3} = \sqrt{27}$; $5^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{5}$; $x^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{x^2}$; $2^{-\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$; $5^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{25}}$.

Расширяя понятие степени, можно, исходя из непрерывности функции $y = a^x$ $(a > 0)$, определить степень числа a с любым действительным показателем. Таким образом, степень a^α существует при $a \in R$, $a > 0$ и $\alpha \in R$.

Степени обладают следующими свойствами:

1) $a^0 = 1$; 5) $(a^x)^y = a^{xy}$;

2) $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$; 6) $(ab)^x = a^x b^x$;

3) $a^x a^y = a^{x+y}$; 7) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$; $b \neq 0$.

4) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$;

Непосредственным образом с понятием степени связано понятие логарифма.

Если $a > 0$; $a \neq 1$; $b > 0$, то **логарифмом** числа b по основанию a называется показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b. Запись $\log_a b$ читается: логарифм b по основанию a.

Если $\log_a b = c$, то $a^c = b$. Отсюда следует основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a b} = b$; $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

Свойства логарифмов:

1) $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$; 4) $\log_a a = 1$;

2) $\log_a\left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$; 5) $\log_a 1 = 0$;

3) $\log_a b^p = p\log_a b$; 6) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$;

7) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ (формула изменения основания логарифма).

Например, т. к. $5^2 = 25$, то $\log_5 25 = 2$; т. к. $3^{-2} = \dfrac{1}{9}$, то $\log_3 \dfrac{1}{9} = -2$.

Из основного логарифмического тождества следует, например, что $2^{\log_2 7} = 7$; $4^{\log_2 5} = 2^{2\log_2 5} = 2^{\log_2 25} = 25$;

$\log_2 28 = \log_2 4 + \log_2 7 = 2 + \log_2 7$;

$\log_{16} 64 = \dfrac{\log_2 64}{\log_2 16} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$; $\log_{27} 81 = \dfrac{\log_3 81}{\log_3 27} = \dfrac{4}{3}$.

Логарифм по основанию 10 ($\log_{10} b$) называется *десятичным логарифмом* и обозначается $\lg b$; логарифм по основанию e ($\log_e b$) называется *натуральным логарифмом* и обозначается $\ln b$. Операция взятия логарифма числа по определенному основанию называется *логарифмированием*, обратная операция избавления от логарифма — *потенцированием*.

Итак, повторим: над действительными числами при определенных ограничениях можно производить следующие операции — сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня, логарифмирование, потенцирование.

Есть еще одна операция над числами, на которую мало обращают внимание, но которая тем не менее важна и, как мы увидим в дальнейшем, часто используется при решении уравнений и неравенств: это операция взятия числа по модулю.

Абсолютная величина, или *модуль*, числа a обозначается $|a|$ и определяется, как уже говорилось, следующим образом:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $|a| \geqslant 0$ и $|a| \geqslant a$ для всех $a \in R$.

Например, $|-3| = 3$; $|4| = 4$; $|0| = 0$; $|\sqrt{2} - \sqrt{5}\,| = -(\sqrt{2} - \sqrt{5}\,) = \sqrt{5} - \sqrt{2}$.

Свойства модуля числа:

1) $|ab| = |a||b|$;

2) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$;

3) $|a+b| \leqslant |a| + |b|$;

4) $|a+b| \geqslant |a| - |b|$;

5) $|a-b| \geqslant \big||a| - |b|\big|$.

Взятие числа по модулю используется при извлечении корня четной степени.

Так, $\sqrt{a^2} = |a|$, и в общем случае $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$.

Например, $\sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{5}\,)^2} = |\sqrt{2} - \sqrt{5}\,| = \sqrt{5} - \sqrt{2}$; $\sqrt{(a-1)^2} = |a-1|$; при $a \geqslant 1$ $\sqrt{(a-1)^2} = a - 1$; при $a < 1$ $\sqrt{(a-1)^2} = 1 - a$.

Из чисел, знаков действий и скобок можно составить различные **числовые выражения**. Преобразование числового выражения обычно имеет своей целью вычисление его значения.

Итак, дробь $\frac{p}{q}$, где p — целое, а q — натуральное число, является рациональным числом и может быть представлена в виде либо конечной, либо бесконечной периодической десятичной дроби. Всякая бесконечная непериодическая десятичная дробь является иррациональным числом. Иррациональное число нельзя представить в виде дроби $\frac{p}{q}$, и обратно, каждое число, не представимое в виде дроби $\frac{p}{q}$, является иррациональным. Мы знаем иррациональное число π, появляющееся при измерении длины окружности и площади круга; иррациональное число e, используемое в теории пределов и являющееся основанием натуральных логарифмов, а также числа, получающиеся при извлечении корней, например, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{7}$ и т. д.

Таким образом, числовые выражения включают все действительные числа: натуральные, целые, рациональные и иррациональные.

Если в выражение входят не только числа, но и буквы, то это выражение называется **алгебраическим**.

Алгебраическое выражение называется **рациональным**, если над входящими в него буквами совершаются только действия сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в натуральную степень.

Если в алгебраическом выражении над буквами совершается действие извлечения арифметического корня, то выражение называется *иррациональным*.

Рациональное выражение называется *целым* относительно некоторой входящей в него переменной величины, если в выражении отсутствует деление на эту переменную или на выражение с этой переменной. В противном случае алгебраическое выражение называется *дробно-рациональным* относительно этой переменной.

Алгебраическое выражение имеет *область определения*, т. е. совокупность всех числовых значений переменных, при которых выражение имеет смысл.

Два выражения называются *тождественно равными*, если при всех значениях входящих в них букв из общей области определения числовые значения выражений равны.

Если на некоторой области определения из справедливости одного равенства следует справедливость второго и, наоборот, из справедливости второго следует справедливость первого, то такие равенства называются **равносильными** на этой области. Равносильное преобразование обозначают $\Leftrightarrow$.

Рациональное алгебраическое выражение, действия над переменными в котором есть только умножение и возведение в степень, называется **одночленом**. Сумма и разность одночленов называется **многочленом**. Выражение вида $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $Q(x) \neq 0$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, называется *рациональной* или *алгебраической дробью*.

Например, a^2bc — рациональное алгебраическое выражение, одночлен; $\sqrt{ab}+1$ — иррациональное алгебраическое выражение; ax^5+bx^2-5 — целое рациональное алгебраическое выражение, многочлен; $\dfrac{ax+b}{cx^2+d}$ — алгебраическая дробь. *Стандартным видом* одночлена называется произведение, составленное из числового множителя (коэффициента) и степеней различных переменных. Например, $5y^2$; $-8a^3y$; $\dfrac{3}{7}\,ab$ — одночлены стандартного вида.

Степенью одночлена стандартного вида называется сумма показателей степеней переменных. Например, $7a^2b$ — одночлен 3-й степени; $-2^3x^2y^5$ — одночлен 7-й степени.

Одночлены, отличающиеся только коэффициентами или равные между собой, называются *подобными*.

В многочлене подобные одночлены, называемые подобными слагаемыми, можно заменить одним одночленом, если сложить их коэффициенты. Такое преобразование называется *приведением подобных слагаемых*.

Например, $ab+5a^2b-12a^2b=ab-7a^2b$.

Если в многочлене одночлены записаны в стандартном виде и приведены подобные слагаемые, то многочлен называется *многочленом стандартного вида*. *Степенью многочлена* считается наибольшая степень входящего в него одночлена.

Сумму или разность многочленов можно преобразовать в многочлен стандартного вида. Для этого нужно раскрыть скобки и привести подобные слагаемые. При раскрытии скобок знаки всех слагаемых в скобках сохраняются, если перед скобкой стоит знак «+», и меняются на противоположные, если перед скобкой стоит знак «−».

При умножении многочлена на одночлен каждый член многочлена умножается на одночлен, и эти произведения складываются. При умножении многочлена на многочлен каждый член

1-го многочлена умножается на каждый член 2-го многочлена, и полученные произведения складываются.

Например, $(a+x)b^2 = ab^2 + xb^2$;

$(x^2+y^2)(1-7y) = x^2+y^2-7x^2y-7y^3$;

$3(x^2+y)+5(x^2-y) = 3x^2+3y+5x^2-5y = 8x^2-2y$.

Преобразование многочлена в произведение двух или нескольких многочленов (одночленов) называется *разложением многочлена на множители*. Для таких преобразований можно использовать способ вынесения общего множителя за скобки, способ группировки, а также формулы сокращенного умножения. Так, если во всех слагаемых многочлена присутствуют одинаковые множители, например, $3a^2b^3+7ab^2+2a^3b^4-8ab^3$, где ab^2 — такой множитель, пишут $3a^2b^3+7ab^2+2a^3b^4-8ab^3 = ab^2(3ab+7+2a^2b^2)$; $3(x+y)+(x+y)^2 = (x+y)(3+x+y)$; $(a+x)^3-a(a+x)^2 = (a+x)^2(a+x-a) = (a+x)^2x$.

Если все члены многочлена не имеют общего множителя, отличного от 1, можно использовать способ группировки. Для этого надо объединить в группы те члены, которые имеют общий множитель, и вынести его за скобки в каждой группе.

Если у всех групп после этого окажется общий множитель, его выносят за скобки.

Например, $ax+3a+3x+9 = a(x+3)+3(x+3) = (x+3)\times(a+3)$; $x^2-2x-xy+2y = x(x-2)-y(x-2) = (x-2)\times(x-y)$.

Формулы сокращенного умножения:

1) $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$;
2) $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$;
3) $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$;
4) $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;
5) $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$;
6) $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$;
7) $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$.

Примеры применения этих формул:

$x^2-y^2-x+y = (x-y)(x+y)-(x-y) = (x-y)(x+y-1)$;

$4x^3-4y^3 = 4(x^3-y^3) = 4(x-y)(x^2+xy+y^2)$;

$(x-5)^2-16 = (x-5)^2-4^2 = (x-5-4)(x-5+4) = (x-9)(x-1)$;

$36-x^2y^2 = 6^2-(xy)^2 = (6-xy)(6+xy)$.

Преобразование алгебраических выражений является одним из основных этапов решения многих математических задач. Умение экономно и правильно производить выкладки при преобразованиях числовых и алгебраических выражений очень важно. В частности, при вычислениях полезно не спешить сразу выполнять арифметические действия, а пытаться сначала упростить выражение. Наибольшего эффекта можно достигнуть с помощью таких преобразований как сокращение дробей, приведение к общему знаменателю, разложение на множители.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЧИСЛОВЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

В примерах, приведенных ниже, нужно произвести арифметические действия и вычислить значение числового выражения.

1. $\left(16\frac{1}{2} - 13\frac{7}{9}\right)\frac{18}{33} + 2{,}2\left(\frac{8}{33} - \frac{1}{11}\right) + \frac{2}{11} = \left(\frac{33^{\llcorner 9}}{2} - \frac{124^{\llcorner 2}}{9}\right) \times$
$\times \frac{18}{33} + \frac{11}{5}\frac{8-3}{33} + \frac{2}{11} = \frac{(297-248)\cdot\cancel{18}}{\cancel{18}\cdot 33} + \frac{\cancel{11}\cdot\cancel{5}}{\cancel{5}\cdot\cancel{33}_{3}} + \frac{2}{11} = \frac{49}{33} +$
$+ \frac{1^{\llcorner 11}}{3} + \frac{2^{\llcorner 12}}{11} = \frac{49+11+6}{33} = \frac{66}{33} = 2.$

Ответ: 2.

2. $\left(1\frac{3}{5}\right)^2 - \left(4\frac{5}{8} - 2{,}4\right) : \frac{5}{8} = \left(\frac{8}{5}\right)^2 - \left(\frac{37^{\llcorner 5}}{8} - \frac{12^{\llcorner 8}}{5}\right)\frac{8}{5} = \frac{64}{25} -$
$- \frac{185-96}{40}\frac{8}{5} = \frac{64}{25} - \frac{89\cdot\cancel{8}}{{}_{5}\cancel{40}\cdot 5} = \frac{64}{25} - \frac{89}{25} = -\frac{25}{25} = -1.$

Ответ: -1.

3. $\left(1{,}4 - 3{,}5 : 1\frac{1}{4}\right) : 2{,}4 + 3{,}4 : 2\frac{1}{8} = \left(\frac{7}{5} - \frac{7}{2}\cdot\frac{4}{5}\right) : \frac{12}{5} +$
$+ \frac{17}{5} : \frac{17}{8} = \left(\frac{7}{5} - \frac{14}{5}\right)\frac{5}{12} + \frac{\cancel{17}\cdot 8}{5\cdot\cancel{17}} = -\frac{7\cdot\cancel{5}}{\cancel{5}\cdot 12} + \frac{8}{5} = -\frac{7^{\llcorner 5}}{12} + \frac{8^{\llcorner 12}}{5} =$
$= \frac{-35+96}{60} = \frac{61}{60} = 1\frac{1}{60}.$

Ответ: $1\frac{1}{60}$.

4. $$\frac{0{,}725 + 0{,}6 + \frac{7}{40} + \frac{11}{20}}{0{,}128\cdot 6\frac{1}{4} - 0{,}0345 : \frac{3}{25}}\cdot 0{,}25 = \frac{\frac{\cancel{725}^{29}}{\cancel{1000}_{40}} + \frac{6^{\llcorner 4}}{10} + \frac{7}{40} + \frac{11^{\llcorner 2}}{20}}{\frac{\cancel{128}^{32}}{\cancel{1000}_{40}}\frac{\cancel{25}}{\cancel{4}} - \frac{\cancel{345}^{23}\cdot\cancel{25}}{\cancel{10000}_{80}\cdot\cancel{3}}} \times$$
$$\times 0{,}25 = \frac{\frac{29+24+7+22}{40}}{\frac{32^{\llcorner 2}}{40} - \frac{23}{80}} = \frac{\cancel{82}^{2}\cdot\cancel{80}^{2}}{\cancel{40}\cdot\cancel{41}}\cdot 0{,}25 = 1.$$

Ответ: 1.

5. $$\left(\frac{3\left(\frac{17}{90}-0{,}125:1\frac{1}{8}\right):480}{\left(7:1{,}8-2\frac{1}{3}:1{,}5\right):2\frac{2}{3}}\right)^{-1}:\left(\frac{679\cdot10^{-2}}{0{,}7}+0{,}3\right)=$$

$$=\left(\frac{3\left(\frac{17}{90}-\frac{\cancel{125}\cdot 8}{\cancel{1000}_8\cdot 9}\right):480}{\left(\frac{7\cdot5}{9}-\frac{7\cdot2}{3\cdot3}\right)\frac{3}{8}}\right)^{-1}\left(\frac{\cancel{679}^{97}\cdot\cancel{10}}{10\cancel{0}\cdot\cancel{7}}+0{,}3\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{3\,\frac{17-10}{90}\,\frac{1}{480}}{\frac{35-14}{9}\,\frac{3}{8}}\right)^{-1}\left(\frac{97+3}{10}\right)^{-1}=\left(\frac{\frac{7}{90}\,\frac{1}{160}}{\frac{\cancel{21}^7}{\cancel{9}_{\cancel{3}}}\,\frac{\cancel{3}}{8}}\right)^{-1}\frac{1}{10}=\frac{\cancel{7}\cdot90\cdot\cancel{160}^{2\cancel{0}}}{\cancel{8}\cdot\cancel{7}\cdot\cancel{10}}=$$

$$=180.$$

Ответ: 180.

6. $$\frac{4{,}5:\left(47{,}375-\left(26\frac{1}{3}-18\cdot0{,}75\right)\cdot2{,}4:0{,}88\right)}{17{,}81:1{,}37-23\frac{2}{3}:1\frac{5}{6}}=$$

$$=\frac{4{,}5:\left(47{,}375-\left(\frac{79}{3}-\frac{\cancel{18}^9\cdot\cancel{75}^3}{\cancel{100}_2}\right)\frac{\cancel{24}^3\cdot10\cancel{0}}{\cancel{10}\cdot\cancel{88}_{11}}\right)}{13-\frac{71\cdot\cancel{6}^2}{\cancel{3}\cdot11}}=$$

$$=\frac{\frac92:\left(47\frac{\cancel{375}^3}{\cancel{1000}_8}-\frac{158-81}{6}\,\frac{30}{11}\right)}{\frac{143-142}{11}}=\frac{\frac92:\left(\frac{379}{8}-\frac{\cancel{77}^7}{\cancel{6}}\,\frac{\cancel{30}^5}{\cancel{11}}\right)}{\frac{1}{11}}=$$

$$=\frac92:\left(\frac{379}{8}-35\right)\cdot11=\frac{\cancel{9}\cdot\cancel{8}^4\cdot\cancel{11}}{\cancel{2}\cdot\cancel{99}_{11}}=4.$$

Ответ: 4.

7. $$0{,}4(3)+0{,}6(2)\cdot2\frac12-\frac{\frac12+\frac13}{0{,}5(8)}:\frac{50}{53}=\frac{43-4}{90}+\frac{62-6}{90}\cdot\frac52-$$

$$-\frac{\frac56}{\frac{58-5}{90}}\cdot\frac{53}{50}=\frac{39}{90}+\frac{\cancel{56}^{28}\cdot5}{\cancel{180}_{90}}-\frac{\cancel{5}\cdot\cancel{90}^9\cdot\cancel{53}}{6\cdot\cancel{53}\cdot\cancel{50}}=\frac{39}{90}+\frac{140}{90}-\frac32=\frac{179}{90}-$$

$$-\frac{135}{90}=\frac{44}{90}=\frac{22}{45}.$$

Ответ: $\frac{22}{45}$.

8. $3\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{49}-\left(2,(4)\cdot 2\frac{5}{11}\right):\left(-\frac{42}{5}\right)=\frac{\cancel{7}\cdot\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}\cdot\cancel{49}_{7}}-\left(2\frac{4}{9}\cdot 2\frac{5}{11}\right):$
$:\left(-\frac{42}{5}\right)=\frac{2}{7}+\frac{\cancel{22}^{2}\cdot\cancel{27}^{3}\cdot 5}{\cancel{9}\cdot\cancel{11}\cdot\cancel{42}_{\cancel{21}_{7}}}=\frac{2}{7}+\frac{5}{7}=1.$

Ответ: 1.

9. Найти 150% от числа a: $a=\dfrac{6{,}62^2+5{,}4\cdot 3{,}38+1{,}22\cdot 3{,}38}{20{,}1^2-13^2+33{,}1\cdot 12{,}9}$.

$a=\dfrac{6{,}62^2+3{,}38(5{,}4+1{,}22)}{(20{,}1-13)(20{,}1+13)+33{,}1\cdot 12{,}9}=\dfrac{6{,}62(6{,}62+3{,}38)}{33{,}1(7{,}1+12{,}9)}=$
$=\dfrac{\cancel{6{,}62}\cdot 10}{_5\cancel{33{,}1}\cdot 20}=\dfrac{2}{20}=\dfrac{1}{10}.$

$150\%\cdot a=\dfrac{15\cancel{0}}{10\cancel{0}}\dfrac{1}{10}=0{,}15.$

Ответ: 0,15.

10. Найти число a, если 40% его равны b.

$b=\dfrac{0{,}536^2-0{,}464^2}{3{,}6^2-7{,}2\cdot 2{,}4+2{,}4^2}=\dfrac{(0{,}536-0{,}464)(0{,}536+0{,}464)}{(3{,}6-2{,}4)^2}=$
$=\dfrac{0{,}072}{1{,}2^2}=\dfrac{0{,}072}{1{,}44}=\dfrac{1}{20}=0{,}05.$

Составим пропорцию: 40% — 0,05
100% — a

$a=\dfrac{0{,}05\cdot 100}{40}=\dfrac{5}{40}=0{,}125.$

Ответ: 0,125.

11. На сколько процентов надо уменьшить число b, чтобы получить число $\dfrac{4b}{5}$?

$b-x\%\cdot b=\dfrac{4b}{5}\Rightarrow\left(1-\dfrac{x}{100}\right)=\dfrac{4}{5}\Rightarrow\dfrac{100-x}{100}=\dfrac{4}{5}\Rightarrow 5(100-$
$-x)=400\Rightarrow 500-5x=400\Rightarrow 5x=100\Rightarrow x=20.$

Ответ: на 20%.

12. Число a больше числа b на 50%. На сколько процентов число b меньше числа a?

$a=b+50\%\cdot b\Rightarrow a=b+\dfrac{1}{2}b\Rightarrow a=\dfrac{3}{2}b.$

$b=a-x\%\cdot a\Rightarrow b=a\left(1-\dfrac{x}{100}\right)\Rightarrow b=\dfrac{3}{2}b\left(1-\dfrac{x}{100}\right)\Rightarrow 1-$
$-\dfrac{x}{100}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow\dfrac{x}{100}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow x=33\dfrac{1}{3}\%.$

Ответ: на $33\frac{1}{3}\%$.

13. Объем продукции увеличился в 10 раз. На сколько процентов произошло увеличение?

Пусть A — объем продукции, тогда увеличенный объем продукции $10A$.

$$a + x\% \cdot A = 10A \Rightarrow A + \frac{x}{100}A = 10A \Rightarrow 1 + \frac{x}{100} = 10 \Rightarrow \Rightarrow \frac{x}{100} = 9 \Rightarrow x = 900\%.$$

Ответ: 900%.

14. Вычислить 30% от a:

$$a = \sqrt{27 + 10\sqrt{2}} + \sqrt{27 - 10\sqrt{2}} = \sqrt{25 + 10\sqrt{2} + 2} + \sqrt{25 - 10\sqrt{2} + 2} = \sqrt{(5 + \sqrt{2})^2} + \sqrt{(5 - \sqrt{2})^2} = 5 + \sqrt{2} + 5 - \sqrt{2} = 10.$$

$$30\% \cdot 10 = \frac{30}{100} \cdot 10 = 3.$$

Ответ: 3.

15. $$\left(\frac{9}{16}\right)^{-\frac{1}{2}} : \left(\frac{25}{36}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(\left(\frac{4}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2} \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{16}{9}} : \sqrt{\frac{36}{25}} - \frac{4}{3} \cdot \sqrt[3]{27} = \frac{\cancel{4}^{2} \cdot 5}{3 \cdot \cancel{6}_{3}} - \frac{4 \cdot \cancel{3}}{\cancel{3}} = \frac{10}{9} - 4 = -\frac{26}{9}.$$

Ответ: $-\frac{26}{9}$.

16. $$\left(-\frac{10}{17}\right)^5 \left(-\frac{51}{2}\right)^3 \left(-\frac{51}{15}\right)^2 \left(-\frac{27}{16}\right)^3 \left(-\frac{2}{3}\right)^6 \left(\frac{4}{27}\right)^2 =$$

$$= -\frac{10^5 \cdot 51^3 \cdot 51^2 \cdot \cancel{27^3} \cdot 2^{\cancel{6}3} \cdot \cancel{4^2}}{17^5 \cdot \cancel{2^3} \cdot 15^2 \cdot 16^{\cancel{3}2} \cdot 3^{\cancel{6}3} \cdot \cancel{27^2}} = -\frac{2^5 \cdot 5^{\cancel{5}3} \cdot \cancel{17^5} \cdot \cancel{3^5} \cdot 2^3}{\cancel{17^5} \cdot \cancel{3^2} \cdot \cancel{5^2} \cdot 16^2 \cdot \cancel{3^3}} =$$

$$= -\frac{\cancel{2^8} \cdot 5^3}{\cancel{2^8}} = -125.$$

Ответ: -125.

17. $$\frac{3^{300} \cdot 4^{50} \cdot 2^{200}}{6^{300}} + \frac{(3^6)^7}{9^{10} \cdot 3^{21}} = \frac{3^{300} \cdot 2^{300}}{3^{300} \cdot 2^{300}} + \frac{3^{42}}{3^{41}} = 1 + 3 = 4.$$

Ответ: 4.

18. $$\left(\sqrt{3}\sqrt{8}\sqrt{6} + \sqrt{\frac{36}{64}}\right) \sqrt[3]{\frac{64}{27}} \sqrt{\frac{126}{14}} = \left(2\sqrt{6}\sqrt{6} + \frac{6}{8}\right) \cdot \frac{4}{3} \times \times 3 = \left(12 + \frac{3}{4}\right) \cdot 4 = \frac{51}{4} \cdot 4 = 51.$$

Ответ: 51.

19. $\sqrt{6-\sqrt{20}} = \sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{5-2\sqrt{5}+1} =$
$= \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} = \sqrt{5}-1.$

Ответ: $\sqrt{5}-1$.

20. $\dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[3]{2}} + \dfrac{\sqrt[15]{2}}{\sqrt[5]{\sqrt[3]{2}}} + \dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{81}}}{\sqrt[3]{9}} = \dfrac{4^{\frac{1}{6}}}{2^{\frac{1}{3}}} + \dfrac{2^{\frac{1}{15}}}{2^{\frac{1}{15}}} + \dfrac{81^{\frac{1}{6}}}{9^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{2^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}} + 1 +$
$+ \dfrac{9^{\frac{1}{3}}}{9^{\frac{1}{3}}} = 1+1+1 = 3.$

Ответ: 3.

21. $\dfrac{\log_2 4 + \log_2 16}{\log_{\frac{1}{2}} 4 + \log_{\frac{1}{2}} 16} = \dfrac{2+4}{-2-4} = -1.$

Ответ: -1.

22. $\dfrac{\log_{\sqrt{6}} \sqrt{2} + \log_{\sqrt{6}} \sqrt{3}}{\log_{0,1} 50 - \log_{0,1} 0,5} = \dfrac{\log_{\sqrt{6}} \sqrt{6}}{\log_{0,1} 100} = \dfrac{1}{-2} = -\dfrac{1}{2}.$

Ответ: $-\dfrac{1}{2}$.

23. $\log_3 \left(\dfrac{\sqrt[3]{81}\,\sqrt[6]{3}}{\sqrt[5]{27}}\right) = \log_3 \dfrac{3^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{6}}}{3^{\frac{3}{5}}} = \log_3 3^{\frac{9}{6}-\frac{3}{5}} = \log_3 3^{\frac{3}{2}-\frac{3}{5}} =$
$= \log_3 3^{\frac{15-6}{10}} = \dfrac{9}{10} \log_3 3 = \dfrac{9}{10}.$

Ответ: 0,9.

24. $\dfrac{\lg 64}{\lg 48 - \lg 3} = \dfrac{\lg 64}{\lg 16} = \dfrac{\dfrac{\log_2 64}{\log_2 10}}{\dfrac{\log_2 16}{\log_2 10}} = \dfrac{\log_2 64}{\log_2 16} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}.$

Ответ: $\dfrac{3}{2}$.

25. $\dfrac{2\lg 6 - \lg 3}{\lg 144} = \dfrac{\lg \dfrac{36}{3}}{2\lg 12} = \dfrac{\lg 12}{2\lg 12} = \dfrac{1}{2}.$

Ответ: $\dfrac{1}{2}$.

26. $\dfrac{\log_3 12}{\log_{36} 3} - \dfrac{\log_3 4}{\log_{108} 3} = \log_3 12 \cdot \log_3 36 - \log_3 4 \cdot \log_3 108 =$
$= (\log_3 3 + \log_3 4)(\log_3 9 + \log_3 4) - \log_3 4(\log_3 4 + \log_3 27) = (1 +$

$+\log_3 4)(2+\log_3 4)-\log_3 4(3+\log_3 4) = 2+3\log_3 4+\log_3^2 4 - 3\log_3 4-\log_3^2 4 = 2.$

Ответ: 2.

27. $\lg 5\cdot\lg 20+\lg^2 2 = \lg 5(\lg 4+\lg 5)+\lg^2 2 = \lg^2 5+2\lg 5\times\lg 2+\lg^2 2 = (\lg 5+\lg 2)^2 = \lg^2 10 = 1.$

Ответ: 1.

28. $7^{\log_3 5}+3^{\log_5 7}-5^{\log_3 7}-7^{\log_5 3} = 7^{\log_3 5}+3^{\frac{\log_3 7}{\log_3 5}}-5^{\frac{\log_5 7}{\log_5 3}} - 7^{\log_5 3} = 7^{\log_3 5}+\left(3^{\log_3 7}\right)^{\log_5 3}-\left(5^{\log_5 7}\right)^{\log_3 5}-7^{\log_5 3} = 7^{\log_3 5} + 7^{\log_5 3}-7^{\log_3 5}-7^{\log_5 3} = 0.$

Ответ: 0.

29. $2^{\log_{2\sqrt{2}}(5-\sqrt{10})+8\log_{\frac14}(\sqrt5-\sqrt2)} = 2^{\frac{\log_2(\sqrt5-\sqrt{10})}{\log_2 2\sqrt2}+8\frac{\log_2(\sqrt5-\sqrt2)}{\log_2\frac14}} = 2^{\frac23\log_2(5-\sqrt{10})-4\log_2(\sqrt5-\sqrt2)} = 2^{\log_2\frac{(5-\sqrt{10})^{\frac23}}{(\sqrt5-\sqrt2)^4}} = \dfrac{(5-\sqrt{10})^{\frac23}}{(\sqrt5-\sqrt2)^4} = \dfrac{(\sqrt5)^{\frac23}(\sqrt5-\sqrt2)^{\frac23}}{(\sqrt5-\sqrt2)^4} = \dfrac{5^{\frac13}}{(\sqrt5-\sqrt2)^{\frac{10}{3}}} = \sqrt[3]{\dfrac{5}{(\sqrt5-\sqrt2)^{10}}}.$

Ответ: $\sqrt[3]{\dfrac{5}{(\sqrt5-\sqrt2)^{10}}}$.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Ниже приведены примеры тождественных преобразований алгебраических выражений.

Упростить выражение.

1. $\dfrac{a}{a^2+1-2a}-\dfrac{1-a(1-a)}{1-a}\,\dfrac{a}{a^3+1}-\dfrac{2a-2a^2-2}{(1-a^2)(a-1)} = \dfrac{a}{(a-1)^2}+\dfrac{(\cancel{a^2-a+1})a}{(a-1)(a+1)(\cancel{a^2-a+1})}-\dfrac{2(a^2-a+1)}{(a-1)^2(a+1)} = \dfrac{\cancel{a^2}+\cancel{a}+\cancel{a^2}-\cancel{a}-\cancel{2a^2}+2a-2}{(a-1)^2(a+1)} = \dfrac{2\cancel{(a-1)}}{(a-1)^{\cancel{2}}(a+1)} = \dfrac{2}{a^2-1}.$

Ответ: $\dfrac{2}{a^2-1}$.

2. $(a+b)^{-1}\dfrac{a^{-2}+b^{-2}}{a^{-1}+b^{-1}}:\left(\dfrac{ab}{a^2+b^2}\right)^{-1}\left(\dfrac{2ab}{a+b}\right)^{-1}=$

$$=\frac{1}{a+b}\,\frac{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}:\frac{a^2+b^2}{ab}\,\frac{a+b}{2ab}=\frac{1}{a+b}\,\frac{(a^2+b^2)ab}{(a+b)a^2b^2}\,\frac{ab}{a^2+b^2}\,\frac{a+b}{2ab}=$$

$$=\frac{\cancel{(a^2+b^2)}\cancel{ab}(a+b)}{(a+b)^{\cancel{2}}\cancel{ab}\cancel{(a^2+b^2)}2ab}=\frac{1}{2ab(a+b)}.$$

О т в е т: $\dfrac{1}{2ab(a+b)}$.

3. $\dfrac{x^2-y^2}{x-y}-\dfrac{x^3-y^3}{x^2-y^2}=\dfrac{x+y}{1}-\dfrac{\cancel{(x-y)}(x^2+xy+y^2)}{\cancel{(x-y)}(x+y)}=$

$$=\frac{\cancel{x^2}+2xy+\cancel{y^2}-\cancel{x^2}-xy-\cancel{y^2}}{x+y}=\frac{xy}{x+y}.$$

О т в е т: $\dfrac{xy}{x+y}$.

4. $\dfrac{a^6+64}{a^4-4a^2+16}-\dfrac{a^4-16}{a^2+4}=\dfrac{(a^2)^3+(2^2)^3}{a^4-4a^2+16}-\dfrac{(a^2-4)\cancel{(a^2+4)}}{\cancel{a^2+4}}=$

$$=\frac{(a^2+4)\cancel{(a^4-4a^2+16)}}{\cancel{a^4-4a^2+16}}-(a^2-4)=\cancel{a^2}+4-\cancel{a^2}+4=8.$$

О т в е т: 8.

5. $\dfrac{a^2}{xy}+\dfrac{(a+x)^2}{x^2-xy}-\dfrac{(a+y)^2}{xy-y^2}=\dfrac{a^2}{xy}+\dfrac{a^2+2ax+x^2}{x(x-y)}-$

$$-\frac{a^2+2ay+y^2}{y(x-y)}=\frac{\cancel{a^2x}-\cancel{a^2y}+\cancel{a^2y}+\cancel{2axy}+x^2y-\cancel{a^2x}-\cancel{2axy}-xy^2}{xy(x-y)}=$$

$$=\frac{xy(x-y)}{xy(x-y)}=1.$$

О т в е т: 1.

6. $\dfrac{1-b^{-1}+b^{-2}}{1-b+b^2}=\dfrac{1-\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{b^2}}{1-b+b^2}=\dfrac{\cancel{b^2-b+1}}{b^2\cancel{(b^2-b+1)}}=\dfrac{1}{b^2}.$

О т в е т: $\dfrac{1}{b^2}$.

7. $\dfrac{27-27a+9a^2-a^3}{a^2-6a+9}=\dfrac{(27-a^3)+9a(a-3)}{(a-3)^2}=$

$$=\frac{(3-a)(9+3a+a^2)-9a(3-a)}{(3-a)^2}=\frac{(3-a)(9+3a+a^2-9a)}{(3-a)^2}=$$

$$= \frac{(3-a)(a^2-6a+9)}{(3-a)^2} = 3-a.$$

Ответ: $3-a$.

8. $\left(\dfrac{x}{y^2+xy} + \dfrac{x-y}{x^2-xy}\right) : \left(\dfrac{y^2}{x^3-xy^2} + \dfrac{1}{x-y}\right) =$

$$= \left(\frac{x}{y(x+y)} + \frac{x-y}{x(x-y)}\right) : \left(\frac{y^2}{x(x-y)(x+y)} + \frac{1}{x-y}\right) =$$

$$= \frac{x^2(x-y)+y(x^2-y^2)}{xy(x^2-y^2)} : \frac{y^2+x^2+xy}{x(x^2-y^2)} = \frac{x^3-\cancel{x^2y}+\cancel{x^2y}-y^3}{xy(x^2-y^2)} \times$$

$$\times \frac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2+xy} = \frac{(x-y)\cancel{(x^2+xy+y^2)}}{\cancel{x}y\cancel{(x^2-y^2)}} \frac{\cancel{x}(x^2-y^2)}{(x^2+xy+y^2)} = \frac{x-y}{y}.$$

Ответ: $\dfrac{x-y}{y}$.

9. $\dfrac{x}{y}\left(\dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}\left(\dfrac{y^2}{x^2} - \dfrac{x}{y}\left(\dfrac{y^3}{x^3} - \dfrac{y^4}{x^4}\right)\right)\right)$.

1) $\dfrac{y^3}{x^3} - \dfrac{y^4}{x^4} = \dfrac{y^3x-y^4}{x^4} = \dfrac{y^3(x-y)}{x^4}$;

2) $\dfrac{x}{y}\dfrac{y^3(x-y)}{x^4} = \dfrac{y^2(x-y)}{x^3}$;

3) $\dfrac{y^2}{x^2} - \dfrac{y^2(x-y)}{x^3} = \dfrac{\cancel{y^2x}-\cancel{y^2x}+y^3}{x^3} = \dfrac{y^3}{x^3}$;

4) $\dfrac{x}{y}\dfrac{y^3}{x^3} = \dfrac{y^2}{x^2}$;

5) $\dfrac{y}{x} - \dfrac{y^2}{x^2} = \dfrac{yx-y^2}{x^2} = \dfrac{y(x-y)}{x^2}$;

6) $\dfrac{x}{y}\dfrac{y(x-y)}{x^2} = \dfrac{x-y}{x}$.

Ответ: $\dfrac{x-y}{x}$.

10. $\left(\dfrac{3}{\sqrt{1+a}} + \sqrt{1-a}\right) : \left(\dfrac{3}{\sqrt{1-a^2}} + 1\right) = \dfrac{3+\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1+a}} :$

$$: \frac{3+\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{\cancel{(3+\sqrt{1-a^2})}(\sqrt{1-a^2})}{(\sqrt{1+a})\cancel{(3+\sqrt{1-a^2})}} = \sqrt{1-a}.$$

Ответ: $\sqrt{1-a}$.

11. $\dfrac{\sqrt{x}}{1-x\sqrt{x}} : \dfrac{\sqrt{x}+x}{x+x\sqrt{x}+1} = \dfrac{\sqrt{x}}{1-(\sqrt{x})^3}\dfrac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} =$

$$= \frac{\cancel{\sqrt{x}}\,\cancel{(1+\sqrt{x}+x)}}{(1-\sqrt{x})\cancel{(1+\sqrt{x}+x)}\cancel{\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})} = \frac{1}{1-x}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{1-x}$.

12. $\left(\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{(x+y)^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{(x+y)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}\right)^{-2} - \dfrac{x+y}{2\sqrt{xy}} =$

$$= \left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}} - \frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)^{-2} - \frac{x+y}{2\sqrt{xy}} =$$

$$= \left(\frac{\cancel{x}+2\sqrt{xy}+\cancel{y}-\cancel{x}-\cancel{y}}{\sqrt{x+y}\,(\sqrt{x}+\sqrt{y})}\right)^{-2} - \frac{x+y}{2\sqrt{xy}} = \frac{(x+y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{4xy} -$$

$$- \frac{x+y}{2\sqrt{xy}} = \frac{(x+y)(x+2\sqrt{xy}+y)-(x+y)\cdot 2\sqrt{xy}}{4xy} =$$

$$= \frac{(x+y)(x+\cancel{2\sqrt{xy}}+y-\cancel{2\sqrt{xy}})}{4xy} = \frac{(x+y)^2}{4xy}.$$

Ответ: $\dfrac{(x+y)^2}{4xy}$.

13. $\dfrac{x-1}{x+x^{0,5}+1} : \dfrac{x^{0,5}+1}{x^{1,5}-1} + \dfrac{2}{x^{-0,5}} = \dfrac{x-1}{x+\sqrt{x}+1} : \dfrac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x})^3-1} +$

$$+ 2\sqrt{x} = \frac{x-1}{x+\sqrt{x}+1}\,\frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1} + 2\sqrt{x} =$$

$$= \frac{(x-1)(\sqrt{x}-1)\cancel{(x+\sqrt{x}+1)}}{\cancel{(x+\sqrt{x}+1)}(\sqrt{x}+1)} + 2\sqrt{x} = x+1.$$

Ответ: $x+1$.

14. $\dfrac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}}\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) : \dfrac{a-b-c}{abc} =$

$$= \frac{(b+c-a)\cancel{a(b+c)}}{\cancel{a(b+c)}(b+c+a)}\,\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc} : \frac{a-b-c}{abc} = \frac{b+c-a}{b+c+a} \times$$

$$\times \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}\,\frac{abc}{a-b-c} = \frac{(b+c-a)(b+c-a)\cancel{(b+c+a)}a\cancel{bc}}{\cancel{(b+c+a)}\cdot 2\cancel{bc}(a-b-c)} =$$

$$= \frac{(a-b-c)^2 a}{a-b-c} = a(a-b-c).$$

Ответ: $a(a-b-c)$.

15. $$\frac{\left(m^2-\frac{1}{n^2}\right)^m\left(n+\frac{1}{m}\right)^{n-m}}{\left(n^2-\frac{1}{m^2}\right)^n\left(m-\frac{1}{n}\right)^{m-n}} = \frac{\left(\frac{m^2n^2-1}{n^2}\right)^m\left(\frac{mn+1}{m}\right)^{n-m}}{\left(\frac{m^2n^2-1}{m^2}\right)^n\left(\frac{mn-1}{n}\right)^{m-n}} =$$
$$= \frac{\cancel{(m^2n^2-1)^{m-n}}m^{2n}m^{m-n}n^{m-n}}{n^{2m}\cancel{(mn+1)^{m-n}}\cancel{(mn-1)^{m-n}}} = \frac{m^{2n+m-n}}{n^{2m-m+n}} = \frac{m^{m+n}}{n^{m+n}} = \left(\frac{m}{n}\right)^{m+n}.$$

Ответ: $\left(\frac{m}{n}\right)^{m+n}$.

16. $$\left(\frac{a+2}{\sqrt{2a}}-\frac{a}{\sqrt{2a}+2}+\frac{2}{a-\sqrt{2a}}\right)\frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2} =$$
$$= \left(\frac{a+2}{\sqrt{2a}}-\frac{a}{\sqrt{2}\,(\sqrt{a}+\sqrt{2}\,)}+\frac{2}{\sqrt{a}\,(\sqrt{a}-\sqrt{2}\,)}\right)\frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2} =$$
$$= \frac{a^2-4-a\sqrt{a}\,(\sqrt{a}-\sqrt{2}\,)+2\sqrt{2}\,(\sqrt{a}+\sqrt{2}\,)}{\sqrt{2a}\,(a-2)}\,\frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2} =$$
$$= \frac{\cancel{a^2}-\cancel{4}-\cancel{a^2}+a\sqrt{2a}+2\sqrt{2a}+\cancel{4}}{\sqrt{2a}\,(a-2)}\,\frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2} =$$
$$= \frac{\cancel{\sqrt{2a}}\,\cancel{(a+2)}(\sqrt{a}-\sqrt{2}\,)}{\cancel{\sqrt{2a}}\,(a-2)\,\cancel{(a+2)}} = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{2}}.$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{2}}$.

17. $$\frac{3a^2+2ax-x^2}{(3x+a)(a+x)}-2+10\frac{ax-3x^2}{a^2-9x^2} = \frac{4a^2-(a^2-2ax+x^2)}{(3x+a)(a+x)}-$$
$$-2+10\frac{x\cancel{(a-3x)}}{\cancel{(a-3x)}(a+3x)} = \frac{4a^2-(a-x)^2}{(a+3x)(a+x)}-2+\frac{10x}{a+3x} =$$
$$= \frac{\cancel{(a+x)}(3a-x)}{(a+3x)\cancel{(a+x)}}-2+\frac{10x}{a+3x} = \frac{3a-x-2a-6x+10x}{a+3x} =$$
$$= \frac{a+3x}{a+3x} = 1.$$

Ответ: 1.

18. $$\sqrt[4]{6x(5+2\sqrt{6}\,)}\,\sqrt{3\sqrt{2x}-2\sqrt{3x}} =$$
$$= \sqrt[4]{6x(2+2\sqrt{2}\,\sqrt{3}+3)}\,\sqrt[4]{x}\,\sqrt{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}} =$$
$$= \sqrt{x}\,\sqrt[4]{6}\,\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3}\,)(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\,)} =$$
$$= \sqrt{x}\,\sqrt[4]{6}\,\sqrt{6+3\sqrt{6}-2\sqrt{6}-6} = \sqrt{x}\,\sqrt[4]{6}\,\sqrt[4]{6} = \sqrt{6x}\,.$$

Ответ: $\sqrt{6x}$.

19. $\dfrac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2})}=\dfrac{\sqrt{3-2\sqrt{6}+2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=$
$=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=1.$

Ответ: 1.

20. $\dfrac{1}{b(abc+a+c)}-\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{b+\frac{1}{c}}}:\dfrac{1}{a+\frac{1}{b}}=\dfrac{1}{b(abc+a+c)}-$
$-\dfrac{1}{a+\dfrac{c}{bc+1}}:\dfrac{b}{ab+1}=\dfrac{1}{b(abc+a+c)}-\dfrac{bc+1}{abc+a+c}\dfrac{ab+1}{b}=$
$=\dfrac{1}{b(abc+a+c)}-\dfrac{(bc+1)(ab+1)}{b(abc+a+c)}=\dfrac{\cancel{1}-ab^2c-ab-bc-\cancel{1}}{b(abc+a+c)}=$
$=\dfrac{-b(abc+a+c)}{b(abc+a+c)}=-1.$

Ответ: -1.

21. $\left(\dfrac{2-b}{b-1}+2\dfrac{a-1}{a-2}\right):\left(b\dfrac{a-1}{b-1}+a\dfrac{2-b}{a-2}\right)=$
$=\dfrac{(2-b)(a-2)+(2a-2)(b-1)}{(b-1)(a-2)}:\dfrac{(ab-b)(a-2)+(2a-ab)(b-1)}{(b-1)(a-2)}=$
$=\dfrac{\cancel{2a}-ab-4+\cancel{2b}+2ab-\cancel{2b}-\cancel{2a}+2}{a^2b-\cancel{ab}-\cancel{2ab}+2b+\cancel{2ab}-ab^2-2a+\cancel{ab}}=\dfrac{ab-2}{ab(a-b)-2(a-b)}=$
$=\dfrac{\cancel{ab-2}}{(a-b)\cancel{(ab-2)}}=\dfrac{1}{a-b}.$

Ответ: $\dfrac{1}{a-b}$.

22. $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}+\dfrac{3}{\sqrt{3}-2}+\dfrac{15}{(3-\sqrt{3})}\right)(\sqrt{3}+5)^{-1}=$
$=\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}+\dfrac{3}{\sqrt{3}-2}+\dfrac{15}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}\right)\dfrac{1}{\sqrt{3}+5}=$
$=\dfrac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)+3\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)+15(\sqrt{3}-2)}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-2)}\dfrac{1}{\sqrt{3}+5}=$
$=\dfrac{6-4\sqrt{3}+9-3\sqrt{3}+15\sqrt{3}-30}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+5)}=\dfrac{8\sqrt{3}-15}{(3+5\sqrt{3})(3-\sqrt{3}-2\sqrt{3}+2)}=$
$=\dfrac{8\sqrt{3}-15}{(3+5\sqrt{3})(5-3\sqrt{3})}=\dfrac{8\sqrt{3}-15}{15-9\sqrt{3}+25\sqrt{3}-45}=\dfrac{8\sqrt{3}-15}{16\sqrt{3}-30}=\dfrac{1}{2}.$

Ответ: $\dfrac{1}{2}$.

23. $\sqrt[4]{32\sqrt[3]{4}}+\sqrt[4]{64\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}-3\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}=\sqrt[4]{2^5}\,\sqrt[12]{2^2}+\sqrt[4]{2^6}\times$ $\times\sqrt[12]{2^{-1}}-3\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[12]{2}=2^{\frac{5}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{6}}+2^{\frac{3}{2}}\cdot 2^{-\frac{1}{12}}-3\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{12}}=2^{\frac{17}{12}}+$ $+2^{\frac{17}{12}}-3\cdot 2^{\frac{5}{12}}=2\cdot 2^{1\frac{5}{12}}-3\cdot 2^{\frac{5}{12}}=4\cdot 2^{\frac{5}{12}}-3\cdot 2^{\frac{5}{12}}=2^{\frac{5}{12}}=$ $=\sqrt[12]{2^5}=\sqrt[12]{32}$.

Ответ: $\sqrt[12]{32}$.

24. $5\sqrt{48\sqrt[3]{\frac{2}{3}}}+\sqrt{32\sqrt[3]{\frac{9}{4}}}-11\sqrt[3]{12\sqrt{8}}=5\cdot 4\sqrt{3}\,\sqrt[6]{2}\,\sqrt[6]{\frac{1}{3}}+$ $+4\sqrt{2}\,\sqrt[3]{3}\,\sqrt[3]{\frac{1}{2}}-11\cdot 2\sqrt[3]{3}\,\sqrt[6]{2}=20\cdot 3^{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}\cdot 2^{\frac{1}{6}}+4\cdot 3^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}-$ $-22\cdot 3^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{6}}=20\cdot 3^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{6}}+4\cdot 3^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{6}}-22\cdot 3^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{6}}=2\cdot 2^{\frac{1}{6}}\times$ $\times 3^{\frac{1}{3}}=2\sqrt[6]{2}\,\sqrt[3]{3}=2\sqrt[6]{18}$.

Ответ: $2\sqrt[6]{18}$.

25. $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}\,(2-\sqrt{3})=\sqrt[3]{8+12\sqrt{3}+18+3\sqrt{3}}\,(2-$ $-\sqrt{3})=\sqrt[3]{2^3+3\cdot 2^2\sqrt{3}+3\cdot 2(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^3}\,(2-\sqrt{3})=$ $=\sqrt[3]{(2+\sqrt{3})^3}\,(2-\sqrt{3})=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$.

Ответ: 1.

Вычислить значение выражения.

26. $\dfrac{1}{y(xyz+x+z)}-\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{y+\frac{1}{z}}}:\dfrac{1}{x+\frac{1}{y}}$ при $x=3$; $y=\sqrt{3}$; $z=-\sqrt{5}$.

1) $\dfrac{1}{x+\dfrac{z}{yz+1}}:\dfrac{y}{xy+1}=\dfrac{(yz+1)(xy+1)}{(xyz+x+z)y}$.

2) $\dfrac{\cancel{1}-xy^2z-yz-xy-\cancel{1}}{y(xyz+x+z)}=-\dfrac{y(xyz+x+z)}{y(xyz+x+z)}=-1$.

Ответ: -1.

27. $x^8+\dfrac{1}{x^8}$, если $x+\dfrac{1}{x}=3$.

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=9\Rightarrow x^2+2+\dfrac{1}{x^2}=9\Rightarrow x^2+\dfrac{1}{x^2}=7$.

$\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2=49\Rightarrow x^4+2+\dfrac{1}{x^4}=49\Rightarrow x^4+\dfrac{1}{x^4}=47$.

$$\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)^2=2209 \Rightarrow x^8+2+\frac{1}{x^8}=2209 \Rightarrow x^8+\frac{1}{x^8}=2207.$$

Ответ: 2207.

28. $\sqrt{(8-x)(5+x)}$, если $\sqrt{8-x}+\sqrt{5+x}=5$.

$(\sqrt{8-x}+\sqrt{5+x})^2=25 \Rightarrow 8-\cancel{x}+2\sqrt{(8-x)(5+x)}+5+$ $+\cancel{x}=25 \Rightarrow 2\sqrt{(8-x)(5+x)}=12 \Rightarrow \sqrt{(8-x)(5+x)}=6$.

Ответ: 6.

29. $\sqrt{25-x^2}+\sqrt{15-x^2}$, если $\sqrt{25-x^2}-\sqrt{15-x^2}=2$.

$(\sqrt{25-x^2}+\sqrt{15-x^2})(\sqrt{25-x^2}-\sqrt{15-x^2})=25-\cancel{x^2}-$ $-15+\cancel{x^2}=10 \Rightarrow \sqrt{25-x^2}+\sqrt{15-x^2}=\dfrac{10}{2}=5$.

Ответ: 5.

30. Разность $\sqrt{|12\sqrt{5}-29|}-\sqrt{|12\sqrt{5}+29|}$ является целым числом. Найти это число.

$12\sqrt{5}-29<0? \Rightarrow 12\sqrt{5}<29? \Rightarrow 720<841$ верно.

$|12\sqrt{5}-29|=29-12\sqrt{5}$.

$(\sqrt{29-12\sqrt{5}}-\sqrt{29+12\sqrt{5}})^2=29-\cancel{12\sqrt{5}}-2\sqrt{841-720}+$ $+29+\cancel{12\sqrt{5}}=58-22=36$.

$\sqrt{29-12\sqrt{5}}-\sqrt{29+12\sqrt{5}}=\pm\sqrt{36}=\pm 6$.

$\sqrt{29-12\sqrt{5}}<\sqrt{29+12\sqrt{5}} \Rightarrow \sqrt{29-12\sqrt{5}}-\sqrt{29+12\sqrt{5}}=$ $=-6$.

Ответ: -6.

Доказать рациональность числа.

31. $\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}$.

$(\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}})^2=$

$=3+2\sqrt{2}+2\sqrt{(3+2\sqrt{2})\cdot 2(3-2\sqrt{2})}+6-4\sqrt{2}=$

$=9-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\sqrt{9-8}=9$.

$\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}=3$, т. к. выражение слева больше 0.

Ответ: 3.

32. $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.

$(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}})^3=20+\cancel{14\sqrt{2}}+$ $+3\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})^2}\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}+3\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\times$ $\times\sqrt[3]{(20-14\sqrt{2})^2}+20-\cancel{14\sqrt{2}}=40+$

$+3\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})(20-14\sqrt{2})}\,(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}})=$
$=40+3\sqrt[3]{400-392}\,(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt{20-14\sqrt{2}}).$

Обозначим $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=x$. Тогда $x^3=$ $=40+6x \Rightarrow x^3-6x-40=0$. $x=4$ является корнем этого уравнения, т. к. $64-24-40=0$.

Разделим уголком:

$$\begin{array}{rl}
-\begin{array}{l} \cancel{x^3}-6x\;-\;40 \\ \cancel{x^3}-4x^2 \end{array} & \begin{array}{|l} x-4 \\ \hline x^2+4x+10 \end{array} \\
\hline
-\begin{array}{l} 4x^2-6x \\ 4x^2-16x \end{array} & \\
\hline
-\begin{array}{l} \cancel{10x}-40 \\ \cancel{10x}-40 \end{array} & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

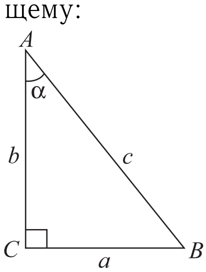
$x^2+4x+10=0$
$x_{1,\,2}=-2\pm\sqrt{4-10} \Rightarrow$ корней нет. Следовательно,
$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt{20-14\sqrt{2}}=4.$

О т в е т: 4.

Тригонометрия

Начнем с определений.

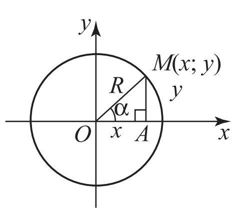
1. В прямоугольном $\triangle ABC$ $\angle C = 90^\circ$, α — острый угол $\triangle ABC$ $(0 < \alpha < 90^\circ)$, a и b — катеты, c — гипотенуза. *Синусом угла* α называется отношение противолежащего катета a к гипотенузе c; *косинусом угла* α называется отношение прилежащего катета b к гипотенузе c; *тангенсом угла* α называется отношение противолежащего катета к прилежащему; *котангенсом угла* α называется отношение прилежащего катета к противолежащему:



$$\sin\alpha = \frac{a}{c}; \quad \cos\alpha = \frac{b}{c};$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

Углы здесь и в дальнейшем измеряются в градусах либо в радианах.

Один градус (1°) — это $\frac{1}{90}$ величины прямого угла, или $\frac{1}{180}$ величины развернутого угла. Один радиан (1 рад) — центральный угол, длина дуги которого равна радиусу. 1 рад $= \frac{180^\circ}{\pi}$; $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ рад; 1 рад $\approx 57^\circ$. Полный угол равен 360° или 2π рад. Развернутый — 180° или π рад.



2. Рассмотрим единичную окружность в прямоугольной системе координат с центром в начале координат и радиусом, равным 1. Возьмем на этой окружности произвольную точку $M(x; y)$, соединим ее с началом координат и отметим ее ординату и абсциссу.

$$OM = R = 1; \quad OA = x;$$
$$MA = y; \quad \angle MOA = \alpha.$$

Получим прямоугольный $\triangle MOA$, ордината y — катет, противолежащий углу α, абсцисса x — катет, прилежащий к углу α.

$$\sin\alpha = \frac{y}{R};\quad R = 1 \Rightarrow \sin\alpha = y;$$
$$\cos\alpha = \frac{x}{R} \Rightarrow \cos\alpha = x;\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x};\quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}.$$

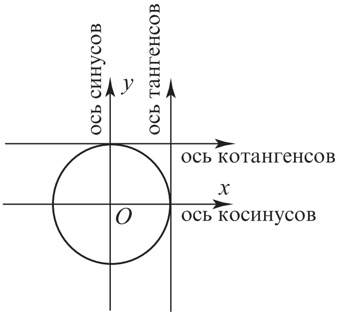
Каждой точке на окружности соответствует единственный угол, образуемый радиусом, проведенным в эту точку, с осью Ox; и обратно, каждому углу между Ox и радиусом соответствует единственная точка на окружности, а, следовательно, единственное значение синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

При движении точки M против часовой стрелки образуются положительные углы, по часовой стрелке — отрицательные. Началом отсчета считается точка с координатами (1; 0).

Сделав полный оборот, радиус OM образует полный угол. Точка M, двигаясь дальше по окружности, образует углы, принимающие сколь угодно большие значения. Таким образом, аргумент α в функциях $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ может принимать любое числовое значение. Функции $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ повторяют свои значения с периодом $T = 2\pi$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ — с периодом $T = \pi$.

Знаки $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ зависят от той четверти, в которой находится угол α.

	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\operatorname{tg}\alpha$	+	−	+	−
$\operatorname{ctg}\alpha$	+	−	+	−



Ось Oy называется осью синусов, ось Ox — осью косинусов. Оси тангенсов и котангенсов показаны на рисунке.

ОСНОВНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

I группа. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента.

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (основное тригонометрическое тождество).

2. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. 3. $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. 4. $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha = 1$.

II группа. Формулы сложения.

1. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.
2. $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$.
3. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.
4. $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.
5. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$. 6. $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$.

III группа. Формулы кратных аргументов.

1. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.
2. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$.
3. $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$.
4. $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$. 5. $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

IV группа. Формулы преобразования сумм и разностей в произведения.

1. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.
2. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.
3. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.
4. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.
5. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$. 6. $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

V группа. Формулы преобразования произведений в суммы и разности.

1. $\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$.
2. $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$.
3. $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$.

VI группа. Формулы понижения степени.

1. $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$. 2. $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$.
3. $\cos^3\alpha = \dfrac{3\cos\alpha - \cos 3\alpha}{4}$. 4. $\sin^3\alpha = \dfrac{3\sin\alpha + \sin 3\alpha}{4}$.

VII группа. Формулы половинного аргумента.

1. $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$. 2. $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$.

3. $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$.

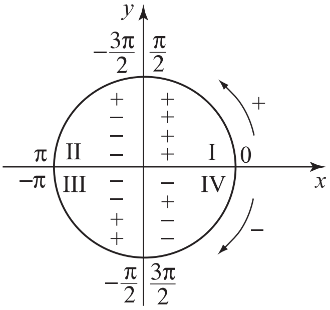
В этих формулах знак выбирается в зависимости от того, в какой четверти находится угол $\dfrac{\alpha}{2}$.

VIII группа. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного угла.

1. $\sin\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

2. $\cos\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

3. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$.



IX группа. Формулы приведения тригонометрических функций для углов $-\alpha$; $\dfrac{\pi}{2}\pm\alpha$; $\pi\pm\alpha$; $\dfrac{3\pi}{2}\pm\alpha$.

Эти формулы определяются следующими простыми правилами: для $\dfrac{\pi}{2}$ и $\dfrac{3\pi}{2}$ функция меняется на кофункцию, т. е. синус на косинус, котангенс на тангенс и т. д., для 0 и π функция не меняется. Знак перед новой функцией ставится в зависимости от того, какой знак имела первая функция в той четверти, куда попадает угол $\left(\dfrac{\pi}{2}\pm\alpha\right)$, $(\pi\pm\alpha)$ и т. п., если $\alpha\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Например, $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$; $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$; $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$; $\operatorname{tg}(\pi-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha$.

Переход от градусной меры угла к радианной осуществляется по формуле: $\alpha_{\text{рад}} = \dfrac{\alpha^\circ\pi}{180^\circ}$.

Если $\alpha = \dfrac{\pi}{24}$, то $\alpha = \dfrac{180^\circ}{24} = 7{,}5^\circ = 7^\circ 30'$.

Значения тригонометрических функций основных углов:

Угол / Функция	0° / 0	30° / $\frac{\pi}{6}$	45° / $\frac{\pi}{4}$	60° / $\frac{\pi}{3}$	90° / $\frac{\pi}{2}$	120° / $\frac{2\pi}{3}$	135° / $\frac{3\pi}{4}$	150° / $\frac{5\pi}{6}$	180° / π	270° / $\frac{3\pi}{2}$	360° / 2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	—	0	—

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Вычислить значения тригонометрических выражений.

1. Вычислить $\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{2\pi}{3} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 1.$

Ответ: 1.

2. Вычислить $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1-\frac{16}{25}} =$ $= \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$ (т. к. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$). $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$.

Ответ: $\frac{3}{4}$.

3. Вычислить $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{5}{13}$.

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \Rightarrow \cos 2\alpha = 1 - 2\cdot\frac{25}{169} = \frac{119}{169}$.

Ответ: $\frac{119}{169}$.

4. Вычислить $\dfrac{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}$, если $\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$.

$$\frac{2\sin\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\cancel{2\sin\alpha}(1+\cos\alpha)}{\cancel{2\sin\alpha}(1-\cos\alpha)}=\frac{1+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{3}{2}$.

5. Вычислить $\cos^8\alpha-\sin^8\alpha$, если $\cos 2\alpha=\dfrac{1}{3}$.

1) $\cos^8\alpha-\sin^8\alpha=(\cos^4\alpha-\sin^4\alpha)(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha)=$ $=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(\cos^4\alpha+(1-\cos^2\alpha)^2)=$ $=\cos 2\alpha(\cos^4\alpha+1-2\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)=\cos 2\alpha(2\cos^4\alpha-\cos 2\alpha)$.

2) $\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}\Rightarrow\cos^4\alpha=\dfrac{(1+\cos 2\alpha)^2}{4}$.

3) $$\cos^8\alpha-\sin^8\alpha=\frac{1}{3}\left(2\frac{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2}{4}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{2\cdot\cancelto{4}{16}}{9\cdot\cancel{4}}-\frac{1}{3}\right)=$$ $$=\frac{1}{3}\frac{5}{9}=\frac{5}{27}.$$

Ответ: $\dfrac{5}{27}$.

6. Вычислить $\operatorname{tg}^3\alpha+\operatorname{ctg}^3\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=2$.

1) $\operatorname{tg}^3\alpha+\operatorname{ctg}^3\alpha=(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)(\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha+$ $+\operatorname{ctg}^2\alpha)=(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)\left(\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}-1\right)=(\operatorname{tg}\alpha+$ $+\operatorname{ctg}\alpha)\left(\dfrac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}-1\right)$.

2) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=2\Rightarrow\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=2\Rightarrow\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=2\Rightarrow$ $\Rightarrow\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$.

3) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha-$ $-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=$ $=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

4) $$\operatorname{tg}^3\alpha+\operatorname{ctg}^3\alpha=2\left(\frac{1-2\cdot\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}-1\right)=2\left(\frac{1\cdot 4}{2}-1\right)=2.$$

Ответ: 2.

7. Вычислить без таблиц $\cos\dfrac{\pi}{8}$.

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\Rightarrow\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}\Rightarrow\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{1+\frac{\sqrt2}{2}}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{2+\sqrt2}{4}\Rightarrow\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt2}}{2}\quad\left(\frac{\pi}{8}\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right).$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt2}}{2}$.

8. Вычислить без таблиц $\sin\dfrac{\pi}{12}\cos\dfrac{5\pi}{12}$.

$$\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}=\sin\frac{\pi}{12}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{12}\right)=\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}=$$

$$=\sin^2\frac{\pi}{12}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt3}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt3}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{2-\sqrt3}{4}$.

9. Вычислить $\sin 18^\circ$.

$\sin 36^\circ=\cos(90^\circ-36^\circ)=\cos 54^\circ$.

Обозначим: $18^\circ=\alpha$, тогда $36^\circ=2\alpha$, $54^\circ=3\alpha$.

$$\sin 2\alpha=\cos 3\alpha\Leftrightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha=\cos\alpha(4\cos^2\alpha-3)\Leftrightarrow 2\sin\alpha=4\cos^2\alpha-3\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\cos^2\alpha-2\sin\alpha-3=0\Leftrightarrow 4(1-\sin^2\alpha)-2\sin\alpha-3=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\sin^2\alpha+2\sin\alpha-1=0.$$

Пусть $\sin\alpha=x$, $0<x<1$, т. к. $0<\sin 18^\circ<1$.

$$4x^2+2x-1=0\Leftrightarrow x_{1,\,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{4}=\frac{\sqrt5-1}{4}.$$

С учетом ограничений: $x=\dfrac{\sqrt5-1}{4}$.

Ответ: $\sin 18^\circ=\dfrac{\sqrt5-1}{4}$.

Упростить выражения.

10. $\cos^2 2\alpha+4\sin^2\alpha\cos^2\alpha=\cos^2 2\alpha+\sin^2 2\alpha=1$.

Ответ: 1.

11. $$\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}=\frac{1}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}+\frac{1}{1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}=$$

$$= \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha} + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha} = 1.$$

Ответ: 1.

12. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta - \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\alpha + \cos^2\beta - (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = \cos^2\alpha + \cos^2\beta - \cos^2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta = \cos^2\alpha(1-\cos^2\beta) + \cos^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta = \cos^2\alpha\sin^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta + \cos^2\beta = \sin^2\beta(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha) + \cos^2\beta = \sin^2\beta + \cos^2\beta = 1.$

Ответ: 1.

13. $$\frac{(1+\operatorname{tg}\alpha)\cos\alpha}{2\sqrt{2}\,\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)} = \frac{\left(1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)\cos\alpha}{2\sqrt{2}\,\left(\sin\frac{\pi}{4}\,\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{4}\,\sin\alpha\right)} =$$
$$= \frac{\cancel{\cos\alpha+\sin\alpha}}{2\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,\cancel{(\cos\alpha+\sin\alpha)}} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

14. $$\frac{1+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\beta} - \frac{1+\sin 2\beta}{\cos 2\beta} = \frac{1+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}} -$$
$$- \frac{\sin^2\beta + 2\sin\beta\cos\beta + \cos^2\beta}{\cos^2\beta - \sin^2\beta} = \frac{\sin\beta+\cos\beta}{\cos\beta-\sin\beta} -$$
$$- \frac{(\sin\beta+\cos\beta)^{\cancel{2}}}{(\cos\beta-\sin\beta)\cancel{(\cos\beta+\sin\beta)}} = \frac{\sin\beta+\cos\beta}{\cos\beta-\sin\beta} - \frac{\sin\beta+\cos\beta}{\cos\beta-\sin\beta} = 0.$$

Ответ: 0.

15. $8\cos^4 x - 4\cos 2x - \cos 4x = 8\cos^4 x - 4(2\cos^2 x - 1) - (2\cos^2 2x - 1) = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 4 - 2(2\cos^2 x - 1)^2 + 1 = \cancel{8\cos^4 x} - \cancel{8\cos^2 x} + 5 - \cancel{8\cos^4 x} + \cancel{8\cos^2 x} - 2 = 3.$

Ответ: 3.

16. $$\frac{1-\sin^6 x - \cos^6 x}{1-\sin^4 x-\cos^4 x} =$$
$$= \frac{1-(\sin^2 x)^3 - \cos^6 x}{1-(\sin^2 x)^2 - \cos^4 x} = \frac{(1-\sin^2 x)(1+\sin^2 x+\sin^4 x) - \cos^6 x}{(1-\sin^2 x)(1+\sin^2 x) - \cos^4 x} =$$
$$= \frac{\cos^2 x(1+\sin^2 x+\sin^4 x) - \cos^6 x}{\cos^2 x(1+\sin^2 x) - \cos^4 x} = \frac{1+\sin^2 x+\sin^4 x - \cos^4 x}{1+\sin^2 - \cos^2 x} =$$

$$= \frac{1-\cos^2 x+\sin^2 x+\sin^2 x}{\sin^2 x+\sin^2 x} = \frac{3\sin^2 x}{2\sin^2 x} = \frac{3}{2}.$$

Ответ: $\frac{3}{2}$.

17. $\cos^2\alpha+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=$

$$=\cos^2\alpha+\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{3}\sin\alpha\right)^2+$$

$$+\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{3}\sin\alpha\right)^2=\cos^2\alpha+\left(\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)^2+$$

$$+\left(\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)^2=\cos^2\alpha+\frac{1}{4}\cos^2\alpha-\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\sin\alpha}+$$

$$+\frac{3}{4}\sin^2\alpha+\frac{1}{4}\cos^2\alpha+\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\sin\alpha}+\frac{3}{4}\sin^2\alpha=$$

$$=\cos^2\alpha+\frac{1}{2}\cos^2\alpha+\frac{3}{2}\sin^2\alpha=$$

$$=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+\frac{1}{2}\cos^2\alpha+\frac{1}{2}\sin^2\alpha=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

Ответ: $\frac{3}{2}$.

Доказать тождества.

18. $\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta$.

Доказательство.

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\beta}{\sin\beta}=\frac{\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta}=$$

$$=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}.$$

19. $\frac{\sin\alpha+2\sin2\alpha+\sin3\alpha}{\cos\alpha+2\cos2\alpha+\cos3\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha$.

Доказательство.

$$\frac{2\sin2\alpha+2\sin\frac{\alpha+3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha-3\alpha}{2}}{2\cos2\alpha+2\cos\frac{\alpha+3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha-3\alpha}{2}}=\frac{2\sin2\alpha+2\sin2\alpha\cos\alpha}{2\cos2\alpha+2\cos2\alpha\cos\alpha}=$$

$$=\frac{\cancel{2}\sin2\alpha\,\cancel{(1+\cos\alpha)}}{\cancel{2}\cos2\alpha\,\cancel{(1+\cos\alpha)}}=\operatorname{tg}2\alpha.$$

20. $(\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha)^2=1-\sin4\alpha$.

Доказательство.

$(\sin2\alpha-\cos2\alpha)^2=\sin^2 2\alpha-2\sin2\alpha\cos2\alpha+\cos^2 2\alpha=1-$
$-\sin4\alpha$.

21. Преобразовать выражение вида $a\sin\alpha + b\cos\alpha$ в произведение ($a \neq 0$; $b \neq 0$).

Решение.

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha\right) =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\varphi\sin\alpha + \sin\varphi\cos\alpha) = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\varphi+\alpha).$$

Такое преобразование возможно, т. к. $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$. $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

22. Доказать, что $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\,\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$.

Доказательство.

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4} + \cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right).$$

23. Доказать, что $\cos 2\alpha - \sqrt{3}\,\sin 2\alpha = 2\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$.

Доказательство.

$$\cos 2\alpha - \sqrt{3}\,\sin 2\alpha = 2\left(\frac{1}{2}\cos 2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha\right) =$$

$$= 2\left(\cos 2\alpha\cos\frac{\pi}{3} - \sin 2\alpha\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right).$$

24. $\dfrac{\sin 2\alpha + \sin 5\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 5\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha.$

Доказательство.

$$\frac{\sin 2\alpha + (\sin 5\alpha - \sin\alpha)}{\cos 2\alpha + (\cos 2\alpha + \cos 5\alpha)} = \frac{\sin 2\alpha + 2\sin 2\alpha\cos 3\alpha}{\cos 2\alpha + 2\cos 2\alpha\cos 3\alpha} =$$

$$= \frac{\sin 2\alpha\,\cancel{(1+2\cos 3\alpha)}}{\cos 2\alpha\,\cancel{(1+2\cos 3\alpha)}} = \operatorname{tg} 2\alpha.$$

25. $\operatorname{tg} 3\alpha = \dfrac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}.$

Доказательство.

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg}(2\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\operatorname{tg}\alpha} =$$

$$= \frac{2\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

26. $\dfrac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}=\operatorname{tg}^4\alpha.$

Доказательство.

$$\frac{3-4\cos 2\alpha+2\cos^2 2\alpha-1}{3+4\cos 2\alpha+2\cos^2 2\alpha-1}=\frac{2(\cos^2 2\alpha-2\cos 2\alpha+1)}{2(\cos^2 2\alpha+2\cos 2\alpha+1)}=$$
$$=\frac{(1-\cos 2\alpha)^2}{(1+\cos 2\alpha)^2}=\frac{(2\sin^2\alpha)^2}{(2\cos^2\alpha)^2}=\frac{\sin^4\alpha}{\cos^4\alpha}=\operatorname{tg}^4\alpha.$$

27. $\dfrac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{3\pi}{4}+\alpha\right).$

Доказательство.

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi}{4}+\alpha\right)=\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}\ \operatorname{tg}\alpha}\right)^2=\frac{(\operatorname{tg}\alpha-1)^2}{(\operatorname{tg}\alpha+1)^2}=\frac{\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-1\right)^2}{\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+1\right)^2}=$$
$$=\frac{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}{\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=\frac{\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}.$$

28. $\sin^4\alpha=\dfrac{1}{8}\,(\cos 4\alpha-4\cos 2\alpha+3).$

Доказательство.

$$\frac{1}{8}\,(\cos 4\alpha-4\cos 2\alpha+3)=\frac{1}{8}\,(2\cos^2 2\alpha-1-4\cos 2\alpha+3)=$$
$$=\frac{1}{8}\,(2\cos^2 2\alpha-4\cos 2\alpha+2)=\frac{1}{4}\,(\cos^2 2\alpha-2\cos 2\alpha+1)=$$
$$=\frac{1}{4}\,(1-\cos 2\alpha)^2=\frac{1}{4}\,(2\sin^2\alpha)^2=\sin^4\alpha.$$

29. $\cos\alpha+\sin\beta=2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right).$

Доказательство.

$$\cos\alpha+\sin\beta=\cos\alpha+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=2\cos\frac{\alpha+\frac{\pi}{2}-\beta}{2}\times$$
$$\times\cos\frac{\alpha-\frac{\pi}{2}+\beta}{2}=2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=$$
$$=2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

30. $\sin 10^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ=\dfrac{1}{8}.$

Доказательство.

$$\sin 10^\circ\cos 10^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ=\frac{1}{8}\cos 10^\circ\Leftrightarrow\frac{1}{2}\sin 20^\circ\cos 20^\circ\times$$
$$\times\cos 40^\circ=\frac{1}{8}\cos 10^\circ\Leftrightarrow\frac{1}{4}\sin 40^\circ\cos 40^\circ=\frac{1}{8}\cos 10^\circ\ \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{8}\sin 80^\circ = \dfrac{1}{8}\cos 10^\circ \Leftrightarrow \sin 80^\circ = \cos 10^\circ \Leftrightarrow \cos(90^\circ - 80^\circ) =$
$= \cos 10^\circ \Leftrightarrow \cos 10^\circ = \cos 10^\circ$.

31. $\sin 18^\circ \cos 36^\circ = \dfrac{1}{4}$.

Доказательство.

Умножим обе части равенства на $\cos 18^\circ$.

$\sin 18^\circ \cos 18^\circ \cos 36^\circ = \dfrac{1}{4}\cos 18^\circ \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\sin 36^\circ \cos 36^\circ =$
$= \dfrac{1}{4}\cos 18^\circ \Leftrightarrow \dfrac{1}{4}\sin 72^\circ = \dfrac{1}{4}\cos 18^\circ \Leftrightarrow \cos(90^\circ - 72^\circ) = \cos 18^\circ \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \cos 18^\circ = \cos 18^\circ$.

Уравнения

Уравнение — равенство с переменной или переменными.

Уравнением с одной переменной называется равенство, содержащее только эту переменную, ее называют *неизвестной величиной*. Значения переменной, при подстановке которых в уравнение получается тождество, называются *корнями* уравнения, или *решениями* уравнения. *Решить уравнение* — это значит найти все его корни и только их, или доказать, что корней нет. Два уравнения, имеющие одни и те же корни и не имеющие других корней, называются *равносильными*. Обычно при решении уравнений производят преобразования выражений, входящих в уравнения. Чтобы такие преобразования были *равносильными*, т. е. не меняли набора корней, необходимо, чтобы корни не терялись и не приобретались посторонние корни. Для этого на каждом этапе преобразования нужно выписывать ограничения на производимые операции. Например, нельзя безоговорочно делить на выражение, содержащее переменную, т. к. это выражение может оказаться нулевым. Нельзя возводить выражение, содержащее переменную, в четную степень, т. к. приобретаются лишние корни.

Мы будем решать различные уравнения, но начнем с *рациональных уравнений*, т. е. таких, в которых правая и левая части являются многочленами, их произведениями и отношениями. Самые простые из них — *линейные уравнения*. Это уравнения вида $ax + b = 0$, где a и b — некоторые постоянные величины и $a \neq 0$. Единственный корень линейного уравнения $x = -b/a$. Например, решим уравнения.

1. $5x + 10 = 0 \Leftrightarrow 5x = -10 \Leftrightarrow x = -\dfrac{10}{5} \Leftrightarrow x = -2.$

2. $2(x - 4) = 3x \Leftrightarrow 2x - 8 = 3x \Leftrightarrow x = -8.$

3. $7 + 11x = x + 4 \Leftrightarrow 10x = -3 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{10}.$

Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c — некоторые числа, $a \neq 0$, x — переменная, называется **квадратным уравнением**. Корни квадратного уравнения вычисляются по формуле $x_{1,\,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, где $D = b^2 - 4ac$ — дискриминант. Если $D = 0$, то квадратное уравнение имеет один корень $x = -b/2a$. Если $D > 0$, то квадратное уравнение имеет два корня: $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ и $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$. Если $D < 0$, то квадратное уравнение не имеет корней. Если b — четное число, т. е. $b = 2k$, то корни можно вычислять по формуле $x_{1,\,2} = \dfrac{-k \pm \sqrt{\dfrac{D}{4}}}{a}$. Если квадратное уравнение имеет вид $ax^2 + c = 0$, его корни вычисляются по формуле: $x = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$, и они существуют, если $-\dfrac{c}{a} \geqslant 0$. Если квадратное уравнение имеет вид $ax^2 + bx = 0$, его корни равны $x_1 = 0$ и $x_2 = -\dfrac{b}{a}$, т. к. $ax^2 + bx = x(ax + b)$. Квадратные уравнения вида $ax^2 + c = 0$ и $ax^2 + bx = 0$ называются *неполными* квадратными уравнениями.

Например, решим уравнения.

4. $x^2 - 9x + 18 = 0 \Leftrightarrow x_{1,\,2} = \dfrac{9 \pm \sqrt{81-72}}{2} \Leftrightarrow x_{1,\,2} = \dfrac{9 \pm 3}{2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x_1 = 3$ и $x_2 = 6$.

Ответ: 3 и 6.

5. $2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_{1,\,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} \Leftrightarrow x_{1,\,2} = \dfrac{5 \pm 3}{4} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x_1 = \dfrac{1}{2}$ и $x_2 = 2$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}$ и 2.

6. $3x^2 - 8x - 16 = 0 \Leftrightarrow x_{1,\,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16+28}}{3} \Leftrightarrow x_{1,\,2} = \dfrac{4 \pm 8}{3} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x_1 = -\dfrac{4}{3}$ и $x_2 = 4$.

Ответ: $-\dfrac{4}{3}$ и 4.

7. $3x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$.

Ответ: $-\sqrt{3}$ и $\sqrt{3}$.

Теорема Виета: если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корни x_1 и x_2, то выполняются соотношения: $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$; $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$. И наоборот, если для некоторых чисел a, b, c существуют числа x_1 и x_2, удовлетворяющие соотношениям $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ и $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$, то числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ раскладывается на множители: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Многие простые квадратные уравнения могут быть решены с помощью теоремы Виета без вычисления корней по основной формуле.

8. $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2$ и $x_2 = 3$, т. к. $x_1 + x_2 = 5$ и $x_1 x_2 = 6$.

Ответ: 2 и 3.

9. $x^2 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -6$ и $x_2 = 1$, т. к. $x_1 + x_2 = -5$ и $x_1 x_2 = -6$.

Ответ: -6 и 1.

10. $x^2 + 11x + 28 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -7$ и $x_2 = -4$, т. к. $x_1 + x_2 = -11$ и $x_1 x_2 = 28$.

Ответ: -7 и 4.

11. $(x - 3)(x - 2) = 6(x - 3) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 6x - 18 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x^2 - 11x + 24 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 3$ и $x_2 = 8$.

Ответ: 3 и 8.

12. $\dfrac{6x - x^2 - 6}{x - 1} - \dfrac{2x - 3}{x - 1} = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x - x^2 - 6 - 2x + 3 = x - 1, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1;\ x_2 = 2, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Ответ: 2.

Некоторые уравнения, содержащие многочлены более высоких степеней, путем *замены переменных* и алгебраических преобразований могут быть сведены к квадратным. Уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$ называется биквадратным.

13. $x^4 - 4x^2 - 12 = 0$; заменим $x^2 = y \geqslant 0$,
$y^2 - 4y - 12 = 0 \Leftrightarrow y_1 = -4$ и $y_2 = 8$; т. к. $y \geqslant 0$, $y = 8$;
$x^2 = 8 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$.

Ответ: $-2\sqrt{2}$ и $2\sqrt{2}$.

14. $(x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) - 24 = 0$; заменим $x^2 + 5x = y$; получим: $y^2 - 2y - 24 = 0 \Leftrightarrow y_1 = -4$; $y_2 = 6$.

1) $x^2 + 5x = -4 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1$ и $x_2 = -4$.

2) $x^2+5x=6 \Leftrightarrow x^2+5x-6=0 \Leftrightarrow x_1=-6$ и $x_2=1$.

Ответ: $-6,\ -4,\ -1,\ 1$.

15. $\dfrac{6}{x^2-1}-\dfrac{2}{x-1}=2-\dfrac{x+4}{x+1} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{6-2(x+1)}{x^2-1}=\dfrac{2(x^2-1)-(x+4)(x-1)}{x^2-1}, \\ x^2-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6-2x-2=2x^2-2-x^2-3x+4, \\ x\neq -1, \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-2=0 \\ x\neq -1, \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-1 \text{ и } x_2=2, \\ x\neq -1, \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Ответ: 2.

16. $(x+3)^3-(x+1)^3=56 \Leftrightarrow \cancel{x^3}+9x^2+27x+27-\cancel{x^3}-$ $-3x^2-3x-1-56=0 \Leftrightarrow 6x^2+24x-30=0 \Leftrightarrow x^2+4x-5=$ $=0 \Leftrightarrow x_1=-5$ и $x_2=1$.

Ответ: -5 и 1.

17. $2x^8+5x^4-7=0$; заменим $x^4=y\geqslant 0$,

$2y^2+5y-7=0 \Leftrightarrow y_{1,\,2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{25+56}}{4} \Leftrightarrow y_{1,\,2}=\dfrac{-5\pm 9}{4} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y_1=-\dfrac{7}{2}$ и $y_2=1$.

$y\geqslant 0 \Rightarrow y=1$; $x^4=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Ответ: -1 и 1.

18. $2\left(x^2+\dfrac{4}{x^2}\right)+3\left(x-\dfrac{2}{x}\right)-13=0$; $x\neq 0$.

Т. к. $\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^2=x^2-2x\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{x^2}=x^2+\dfrac{4}{x^2}-4$, то, приняв $x-\dfrac{2}{x}=y$, получим $x^2+\dfrac{4}{x^2}=y^2+4$;

$2(y^2+4)+3y-13=0 \Leftrightarrow 2y^2+3y-5=0 \Leftrightarrow y_{1,\,2}=$ $=\dfrac{-3\pm\sqrt{9+40}}{4} \Leftrightarrow y_{1,\,2}=\dfrac{-3\pm 7}{4} \Leftrightarrow y_1=-\dfrac{5}{2}$ и $y=1$.

1) $x-\dfrac{2}{x}=-\dfrac{5}{2} \Leftrightarrow x^2-2+\dfrac{5x}{2}=0 \Leftrightarrow 2x^2+5x-4=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x_{1,\,2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{25+32}}{4} \Leftrightarrow x_1=\dfrac{-5-\sqrt{57}}{4}$ и $x_2=\dfrac{-5+\sqrt{57}}{4}$.

2) $x - \dfrac{2}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1$ и $x_2 = 2$.

Ответ: $\dfrac{-5-\sqrt{57}}{4}$; -1; 2; $\dfrac{-5+\sqrt{57}}{4}$.

19. Вычислить $x_1^2 + x_2^2$, если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + x - 5 = 0$.

По теореме Виета: $x_1 + x_2 = -1$ и $x_1x_2 = -5$.

$x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = (-1)^2 - 2(-5) = 1 + 10 = 11$.

Ответ: 11.

20. Известно, что $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{1}{2}$, где x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + x + a = 0$. Определить a.

По теореме Виета: $x_1 + x_2 = -1$ и $x_1x_2 = a$.

$\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{-1}{x_1x_2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x_1x_2 = -2 \Rightarrow$ $\Rightarrow a = -2$.

Ответ: $a = -2$.

Особую сложность для многих представляют **уравнения с модулем**. Чтобы решить уравнение, содержащее переменную под знаком модуля, надо освободиться от модуля, используя его определение.

Кроме того, иногда бывает полезно пользоваться геометрической интерпретацией модуля числа, согласно которой $|x|$ означает расстояние от точки x числовой прямой до нуля, а $|x - b|$ означает расстояние на числовой прямой между точками x и b.

21. $|x + 5| = |10 + x|$.

Выражения внутри модулей могут иметь либо одинаковые, либо разные знаки.

1) $x + 5 = 10 + x \Rightarrow 5 = 10$ — нет решений;

2) $x + 5 = -10 - x \Rightarrow 2x = -15 \Rightarrow x = -7{,}5$.

Ответ: $-7{,}5$.

22. $\left|\dfrac{x-3}{2} + 5\right| = 4$.

Выражение внутри модуля может быть со знаком «+» или со знаком «−».

1) $\dfrac{x-3}{2} + 5 = 4 \Leftrightarrow x - 3 + 10 = 8 \Leftrightarrow x = 1$;

2) $\dfrac{x-3}{2} + 5 = -4 \Leftrightarrow x - 3 + 10 = -8 \Leftrightarrow x = -15$.

Ответ: -15 и 1.

23. $|x^2+x|+3x-5=0$.

1) $\begin{cases} x^2+x\geqslant 0, \\ x^2+x+3x-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1)\geqslant 0, \\ x^2+4x-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\leqslant -1 \text{ и } x\geqslant 0, \\ x_1=-5 \text{ и } x_2=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=-5 \text{ и } x=1.$

2) $\begin{cases} x^2+x<0, \\ -x^2-x+3x-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1)<0, \\ x^2-2x+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1<x<0, \\ x_{1,\,2}=1\pm\sqrt{1-5}\,. \end{cases}$

Уравнение не имеет решений, т. к. $D<0$.

Ответ: -5 и 1.

24. $|x^2-9|+|x^2-4|=5$.

1) $\begin{cases} x^2-9\geqslant 0, \\ x^2-4\geqslant 0, \\ x^2-9+x^2-4=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\geqslant 9, \\ x^2\geqslant 4, \\ 2x^2=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\geqslant 9 \\ x^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\pm 3.$

2) $\begin{cases} x^2-9\geqslant 0, \\ x^2-4\leqslant 0, \\ x^2-9-x^2+4=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\geqslant 9, \\ x^2\leqslant 4, \\ -5=5. \end{cases}$

Невозможно.

3) $\begin{cases} x^2-9<0, \\ x^2-4\geqslant 0, \\ -x^2+9+x^2-4=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2<9, \\ x^2\geqslant 4 \\ 5=5 \end{cases} \Leftrightarrow 4\leqslant x^2<9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3<x\leqslant -2 \text{ и } 2\leqslant x<3.$

4) $\begin{cases} x^2-9<0, \\ x^2-4<0, \\ -x^2+9-x^2+4=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2<9, \\ x^2<4 \\ 2x^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2<4 \\ x^2=4 \end{cases}$

Невозможно.

Ответ: $x\in[-3;\ -2]\cup[2;3]$.

25. $|2x-x^2-3|=1$.

1) $\begin{cases} 2x-x^2-3\geqslant 0, \\ 2x-x^2-3=1 \end{cases} \Leftrightarrow x^2-2x+2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_{1,\,2}=1\pm\sqrt{1-2}\,,$

уравнение не имеет решений, т. к. $D<0$.

2) $\begin{cases} 2x - x^2 - 3 < 0, \\ -2x + x^2 + 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = 0$, уравнение такое же, как и в предыдущем случае, не имеет решений.

Ответ: $\varnothing$.

26. $x^2 + 4|x - 3| - 7x + 11 = 0$.

1) $\begin{cases} x - 3 \geqslant 0, \\ x^2 + 4x - 12 - 7x + 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 3, \\ x^2 - 3x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 3, \\ x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 3, \\ x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}; \end{cases}$

$x = \dfrac{3 - \sqrt{13}}{2} < 0$ и поэтому не подходит.

Проверим $\dfrac{3 + \sqrt{13}}{2} > 3? \Rightarrow 3 + \sqrt{13} > 6? \Rightarrow \sqrt{13} > 3? \Rightarrow$ $\Rightarrow 13 > 9$ — верно, поэтому $x = \dfrac{3 + \sqrt{13}}{2}$ подходит.

2) $\begin{cases} x - 3 < 0, \\ x^2 - 4x + 12 - 7x + 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ x^2 - 11x + 23 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ x_{1,2} = \dfrac{11 \pm \sqrt{121 - 92}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ x_{1,2} = \dfrac{11 \pm \sqrt{29}}{2}; \end{cases}$

$x = \dfrac{11 + \sqrt{29}}{2}$ не подходит, т. к. $x > 8$.

Проверим $\dfrac{11 - \sqrt{29}}{2} < 3? \Rightarrow 11 - \sqrt{29} < 6? \Rightarrow \sqrt{29} > 5? \Rightarrow$ $\Rightarrow 29 > 25$ — верно.

Ответ: $\dfrac{3 + \sqrt{13}}{2}$ и $\dfrac{11 - \sqrt{29}}{2}$.

Уравнения, в которых переменная находится под знаком корня, называются **иррациональными**. Решение иррациональных уравнений сводится к переходу от иррационального уравнения к рациональному путем возведения обеих частей уравнения в степень, равную показателю степени корня. Если показатель степени четный, то необходимо либо предварительно выписывать ограничения: подкоренное выражение должно быть неотрицательным, выражение, равное арифметическому корню, также должно быть неотрицательным, т. к. в четную степень без приобретения посторонних корней можно возводить только неотрицательные выражения, либо делать проверку полученных решений.

27. $x - \sqrt{x+1} = 1.$

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} = x-1, \\ x-1 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = x^2-2x+1, \\ x \geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x=0, \\ x \geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \text{ и } x_2 = 3, \\ x \geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Ответ: 3.

28. $2\sqrt{x+5} = x+2.$

$$\begin{cases} x+2 \geqslant 0, \\ 4(x+5) = (x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -2, \\ 4x+20 = x^2+4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -2, \\ x^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -2, \\ x_1 = -4 \text{ и } x_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Ответ: 4.

29. $\sqrt{x} - \sqrt{x+3} = 1.$

$$\begin{cases} \sqrt{x} = 1 + \sqrt{x+3}, \\ x \geqslant 0, \\ x+3 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{x} = 1 + 2\sqrt{x+3} + \cancel{x} + 3, \\ x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x+3} = -4, \\ x \geqslant 0; \end{cases}$$

Невозможно, т. к. $\sqrt{x+3} \geqslant 0.$

Ответ: $\varnothing$.

30. $\dfrac{x+3}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{3x+1}.$

$$\begin{cases} x-1 > 0, \\ 3x+1 \geqslant 0, \\ x+3 \geqslant 0, \\ (x+3)^2 = (x-1)(3x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x \geqslant -\dfrac{1}{3}, \\ x \geqslant -3, \\ x^2+6x+9 = 3x^2-2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ 2x^2-8x-10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x^2-4x-5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x_1 = -1 \text{ и } x_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5.$$

Ответ: 5.

31. $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x-2}=2\sqrt{x+1}$.

$$\begin{cases} 2x+3 \geqslant 0, \\ x-2 \geqslant 0, \\ x+1 \geqslant 0, \\ 2x+3+2\sqrt{(2x+3)(x-2)}+x-2=4(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -\dfrac{3}{2}, \\ x \geqslant 2, \\ x \geqslant -1, \\ 2\sqrt{(2x+3)(x-2)}=x+3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 2, \\ 4(2x^2-x-6)=x^2+6x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 2, \\ 7x^2-10x-33=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 2, \\ x_{1,\,2}=\dfrac{5 \pm \sqrt{25+231}}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 2, \\ x_{1,\,2}=\dfrac{5 \pm \sqrt{16}}{7} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 2, \\ x_1=-\dfrac{11}{7} \text{ и } x_2=3 \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$$

Ответ: 3.

32. $x^2+3x+\sqrt{x^2+3x}=6$.

$x^2+3x \geqslant 0 \Leftrightarrow x(x+3) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -3$ и $x \geqslant 0$.

Обозначим $\sqrt{x^2+3x}=y \geqslant 0$;

$y^2+y-6=0 \Leftrightarrow y_1=-3$ и $y_2=2$.

Т. к. $y \geqslant 0$, то $y=-3$ не подходит.

$\sqrt{x^2+3x}=2 \Leftrightarrow x^2+3x=4 \Leftrightarrow x^2+3x-4=0 \Leftrightarrow x_1=-4$ и $x_2=1$; $-4<-3$ и $1>0$.

Ответ: -4 и 1.

33. $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{x-3}=\sqrt[3]{2x-5}$.

В этом уравнении нет ограничений; возведем обе части уравнения в куб.

$x-2+3\sqrt[3]{(x-2)^2(x-3)}+3\sqrt[3]{(x-2)(x-3)^2}+x-3=$ $=2x-5 \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{(x-2)(x-3)}\left(\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{x-3}\right)=0$.

1) $\sqrt[3]{(x-2)(x-3)}=0 \Leftrightarrow x=2$ и $x=3$;

2) $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{x-3}=0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-2}=-\sqrt[3]{x-3} \Leftrightarrow x-2=$ $=-x+3 \Leftrightarrow 2x=5 \Leftrightarrow x=2{,}5$.

Ответ: 2; 2,5 и 3.

34. $\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}}=x-1.$

Решим это уравнение без предварительных ограничений, но с проверкой полученных значений x.

$1-\sqrt{x^4-x^2}=x^2-2x+1 \Rightarrow \sqrt{x^4-x^2}=2x-x^2 \Rightarrow x^4-x^2=4x^2-4x^3+x^4 \Rightarrow 4x^3-5x^2=0 \Rightarrow x^2(4x-5)=0 \Rightarrow x=0$ и $x=\dfrac{5}{4}$.

Проверка.

1) $\sqrt{1-0}=-1 \Rightarrow 1=-1$ — невозможно;

2) $\sqrt{1-\dfrac{5}{4}\sqrt{\dfrac{25}{16}-1}}=\dfrac{5}{4}-1 \Rightarrow \sqrt{1-\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{3}{4}}=\dfrac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{\dfrac{1}{16}}=\dfrac{1}{4} \Rightarrow \dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}.$

Ответ: $x=\dfrac{5}{4}$.

35. $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=3.$

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ \sqrt{x}-\sqrt[3]{x} \neq 0, \\ \sqrt{x}+\sqrt[3]{x}=3\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ \sqrt{x} \neq \sqrt[3]{x}, \\ 2\sqrt{x}=4\sqrt[3]{x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x^3-x^2 \neq 0, \\ 2^6x^3=4^6x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x^2(x-1) \neq 0, \\ x^3=2^6x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x \neq 0 \text{ и } x \neq 1, \\ x^3-64x^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ x^2(x-64)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ x=0 \text{ и } x=64 \end{cases} \Leftrightarrow x=64.$$

Ответ: 64.

Решение **показательных и логарифмических уравнений** основано на умении преобразовывать показательные и логарифмические выражения. Основные формулы для этих преобразований приведены на стр. 17.

Простейшее показательное уравнение имеет вид: $a^x=b$; если $a>0$, $a \neq 1$, $b>0$, то это уравнение имеет решение $x=\log_a b$. Если $a=1$, то при любых x $b=1$. Однако достаточно часто показательные уравнения решаются без использования логарифмов путем преобразования показательных выражений к равенству степеней с одинаковыми основаниями и затем приравнивания показателей степени.

Простейшее логарифмическое уравнение имеет вид: $\log_a x = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, его решение $x = a^b$. При решении логарифмических уравнений очень важно помнить об ограничениях на основание и аргумент логарифма.

36. $5^{2x+1} = 25$.

$5^{2x+1} = 5^2 \Leftrightarrow 2x+1 = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

37. $\left(\frac{3}{7}\right)^{3-2x} = \left(\frac{49}{9}\right)^{-3}$.

$\left(\frac{3}{7}\right)^{3-2x} = \left(\frac{9}{49}\right)^{3} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{7}\right)^{3-2x} = \left(\frac{3}{7}\right)^{6} \Leftrightarrow 3 - 2x = 6 \Leftrightarrow 2x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$.

Ответ: $-\frac{3}{2}$.

38. $\sqrt[3]{4^{x+2}} = \frac{4}{\sqrt[5]{2}}$.

$\sqrt[3]{4^{x+2}} = 4 \cdot 2^{-\frac{1}{5}} \Leftrightarrow 2^{\frac{2x+4}{3}} = 2^{2-\frac{1}{5}} \Leftrightarrow \frac{2x+4}{3} = \frac{9}{5} \Leftrightarrow 10x + 20 = 27 \Leftrightarrow 10x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{10}$.

Ответ: 0,7.

39. $7 \cdot 5^x - 5^{x+1} = 2 \cdot 5^{-3}$.

$7 \cdot 5^x - 5 \cdot 5^x = \frac{2}{125} \Leftrightarrow 5^x \cdot 2 = \frac{2}{125} \Leftrightarrow 5^x = 5^{-3} \Leftrightarrow x = -3$.

Ответ: -3.

40. $100^x - 80 \cdot 10^{x-1} - 20 = 0$.

$(10^x)^2 - 80 \cdot 10^x \frac{1}{10} - 20 = 0 \Leftrightarrow (10^x)^2 - 8 \cdot 10^x - 20 = 0$; $10^x = y > 0$.

$y^2 - 8y - 20 = 0 \Leftrightarrow y_1 = -2$ и $y_2 = 10$.

$y > 0$, поэтому $y = -2$ не подходит.

$10^x = 10 \Leftrightarrow x = 1$.

Ответ: 1.

41. $3^{2x+3} + \sqrt{9^{2x+1}} + \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} = 90\frac{1}{3}$.

$3^{2x} \cdot 3^3 + 9^{\frac{2x+1}{2}} + 3^{2x-2} = 90\frac{1}{3} \Leftrightarrow 27 \cdot 3^{2x} + 3^{2x} \cdot 3 + 3^{2x}\frac{1}{9} = 90\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3^{2x}\left(27 + 3 + \frac{1}{9}\right) = 90\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3^{2x}\frac{271}{9} = \frac{271}{3} \Leftrightarrow 3^{2x-1} = 1 \Leftrightarrow$

$3^{2x-1} = 3^0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}.$

О т в е т: $\dfrac{1}{2}$.

42. $\dfrac{3^{2x}}{100^x} = 2(0{,}3)^x + 3.$

$\dfrac{3^{2x}}{10^{2x}} = 2\dfrac{3^x}{10^x} + 3 \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{10}\right)^{2x} - 2\left(\dfrac{3}{10}\right)^x - 3 = 0,$

$\left(\dfrac{3}{10}\right)^x = y > 0;$

$y^2 - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow y_1 = -1$ и $y_2 = 3,$

$y = 3$, т. к. $y = -1$ не подходит.

$\left(\dfrac{3}{10}\right)^x = 3 \Rightarrow x = \log_{0,3} 3.$

О т в е т: $\log_{0,3} 3$.

43. $16x = 10^{2x}(4 + 3(0{,}4)^x).$

$\dfrac{4^{2x}}{10^{2x}} = 4 + 3\left(\dfrac{4}{10}\right)^x \Leftrightarrow \left(\dfrac{4}{10}\right)^{2x} - 3\left(\dfrac{4}{10}\right)^x - 4 = 0.$

$\left(\dfrac{4}{10}\right)^x = y > 0;\ y^2 - 3y - 4 = 0 \Leftrightarrow y_1 = -1$ и $y_2 = 4.$

$y = 4$, т. к. $y = -1$ не подходит.

$(0{,}4)^x = 4 \Leftrightarrow x = \log_{0,4} 4.$

О т в е т: $\log_{0,4} 4$.

44. $10^{1+x^2} - 10^{1-x^2} = 99.$

$10 \cdot 10^{x^2} - 10\dfrac{1}{10^{x^2}} = 99;\ 10^{x^2} = y > 0;$

$10y - \dfrac{10}{y} = 99 \Leftrightarrow 10y^2 - 99y - 10 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ y_{1,\,2} = \dfrac{99 \pm \sqrt{9801 + 400}}{20} \Leftrightarrow y_{1,\,2} = \dfrac{99 \pm 101}{20} \Leftrightarrow y_1 = -\dfrac{1}{10}$ и $y_2 = 10.$

$y = 10$, т. к. $y = -\dfrac{1}{10}$ не подходит.

$10^{x^2} = 10 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$

О т в е т: -1 и 1.

45. $2\log_x 27 - 3\log_{27} x = 1.$

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ 2\log_x 27 - 3\dfrac{1}{\log_x 27} = 1. \end{cases}$$

$\log_x 27 = z.$

$2z - \dfrac{3}{z} = 1 \Leftrightarrow 2z^2 - z - 3 = 0 \Leftrightarrow z_{1,\,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} \Leftrightarrow z_{1,\,2} = \dfrac{1 \pm 5}{4} \Leftrightarrow z_1 = -1$ и $z_2 = \dfrac{3}{2}.$

1) $\log_x 27 = -1 \Rightarrow \dfrac{1}{x} = 27 \Rightarrow x = \dfrac{1}{27},$

2) $\log_x 27 = \dfrac{3}{2} \Rightarrow x^{\frac{3}{2}} = 3^3 \Rightarrow \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9.$

Ответ: $\dfrac{1}{27}$ и 9.

46. $2\log_3(x-2) + \log_3(x-4)^2 = 0.$

$$\begin{cases} x-2>0, \\ x-4 \neq 0, \\ \log_3(x-2)^2 + \log_3(x-4)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2, \\ x \neq 4, \\ (x-2)^2(x-4)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2, \\ x \neq 4, \\ (x-2)(x-4) = \pm 1. \end{cases}$$

1) $x^2 - 6x + 8 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 7 = 0 \Leftrightarrow x_{1,\,2} = 3 \pm \sqrt{9-7} = 3 \pm \sqrt{2};$

$3 + \sqrt{2} > 2$ — подходит; $3 - \sqrt{2} < 2$ — не подходит.

2) $x^2 - 6x + 8 = -1 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3.$

Ответ: 3 и $3 + \sqrt{2}$.

47. $\log_2(9 - 2^x) = 10^{\lg(3-x)}.$

$$\begin{cases} 9 - 2^x > 0, \\ 3 - x > 0, \\ \log_2(9-2^x) = 3 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x < 9, \\ x < 3, \\ 9 - 2^x = 2^{3-x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ 9 - 2^x = 8 \cdot 2^{-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ 2^x + \dfrac{8}{2^x} - 9 = 0. \end{cases} \quad 2^x = z > 0;$$

$z + 8z - 9 = 0 \Leftrightarrow z^2 - 9z + 8 = 0 \Rightarrow z_1 = 1$ и $z_2 = 8.$

$2^x = 1 \Rightarrow x = 0;$

$2^x = 8 \Rightarrow x = 3$, не подходит, т. к. $x < 3$.

Ответ: 0.

48. $\log_3(4 \cdot 3^{x-1} - 1) = 2x - 1.$

$$\begin{cases} 4 \cdot 3^{x-1} - 1 > 0, \\ 4 \cdot 3^{x-1} = 3^{2x-1} \end{cases} \Leftrightarrow 4 \cdot 3^x \frac{1}{3} - 1 = 3^{2x}\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{4}{3}3^x - 1 - 3^{2x}\frac{1}{3} = 0.$$ $3^x = y > 0;$

$\frac{1}{3}y^2 - \frac{4}{3}y + 1 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 4y + 3 = 0 \Leftrightarrow y_1 = 1$ и $y_2 = 3$.

$3^x = 1 \Rightarrow x = 0;$

$3^x = 3 \Rightarrow x = 1.$

Ответ: 0 и 1.

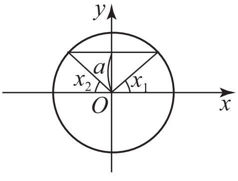
49. $x^{\log_{\sqrt{x}}(2x)} = 4.$

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ x^{\log_x(4x^2)} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ 4x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ x = \pm 1 \end{cases} \text{невозможно.}$$

Ответ: $\varnothing$.

Решение **тригонометрического уравнения** состоит из двух частей: 1) преобразование тригонометрического выражения к простейшему виду; 2) решение простейшего тригонометрического уравнения. Первая часть сложна из-за множества применяемых формул как тригонометрических, так и алгебраических. Применяются такие приемы как разложение на множители, преобразование суммы или разности тригонометрических функций в произведение и, наоборот, произведения в сумму. Достаточно часто тригонометрические уравнения сводятся к линейным и квадратным уравнениям и уравнениям с корнями. Тригонометрические уравнения во всяком случае имеют ограничения, содержащиеся в тангенсе и котангенсе, т. к. $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, а $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, то здесь $\cos x \neq 0$ и $\sin x \neq 0$. Простейшими тригонометрическими уравнениями называются уравнения вида: $\sin x = a$; $\cos x = a$; $\operatorname{tg} x = a$ и $\operatorname{ctg} x = a$.

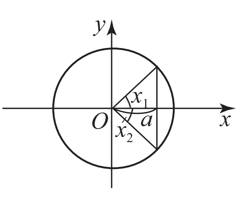
1) Решение уравнения $\sin x = a$, $a \in [-1; 1]$. **Арксинусом** числа a называется число, обозначаемое $\arcsin a$, синус которого равен a, при этом $\arcsin a \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Поэтому решение уравнения $\sin x = a$ записывается: $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, $n \in Z$.



Этому решению соответствуют две точки на окружности:

$$x_1 = \arcsin a + 2\pi n; \quad x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

Напоминаем, что ось Oy — это ось синусов, и значение синуса отмечается на оси Oy.



2) Решение уравнения $\cos x = a$, $a \in [-1; 1]$. **Арккосинусом** числа a называется число, обозначаемое $\arccos a$, косинус ко-

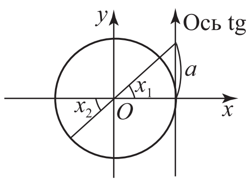
торого равен a, при этом $\arccos a \in [0; \pi]$. Поэтому решение уравнения $\cos x = a$ записывается: $x = \arccos a + 2\pi n$, $n \in Z$.

Этому решению соответствуют две точки на окружности:

$$x_1 = \arccos a + 2\pi n; \quad x_2 = -\arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

Эти решения отмечены на окружности.

Напоминаем, что ось Ox — ось косинусов, и значение косинуса отмечается на оси Ox.

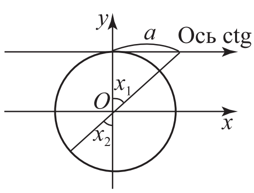


3) Решение уравнения $\operatorname{tg} x = a$.

Арктангенсом числа a называется число, обозначаемое $\operatorname{arctg} a$, тангенс которого равен a, при этом $\operatorname{arctg} a \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Поэтому решение уравнения $\operatorname{tg} x = a$ записывается: $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$, $n \in Z$. Этому решению соответствуют две точки на окружности:

$$x_1 = \operatorname{arctg} a + 2\pi n, \quad x_2 = \pi + \operatorname{arctg} a + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

Напоминаем, что значение тангенса отмечается на оси тангенсов, которая параллельна оси Oy и касается единичной окружности в крайней правой точке.



4) Решение уравнения $\operatorname{ctg} x = a$.

Арккотангенсом числа a называется число, обозначаемое $\operatorname{arcctg} a$, котангенс которого равен a, при этом $\operatorname{arcctg} a \in (0; \pi)$. Поэтому решение уравнения $\operatorname{ctg} x = a$ записывается: $x = \operatorname{arcctg} a + \pi n$, $n \in Z$. Этому решению соответствуют две точки на окружности:

$$x_1 = \operatorname{arcctg} a + 2\pi n, \quad x_2 = \pi + \operatorname{arcctg} a + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

Напоминаем, что значение котангенса отмечается на оси котангенсов, которая параллельна оси Oy и касается единичной окружности в верхней точке.

Там, где возможно, $\arcsin a$, $\arccos a$, $\operatorname{arctg} a$ и $\operatorname{arcctg} a$ заменяются табличными значениями. Соответствующая таблица и тригонометрические формулы приведены в разделе преобразования тригонометрических выражений. Там же рассмотрены примеры таких преобразований.

50. $3\cos x = 1$.

$\cos x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \pm\arccos\frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $\pm\arccos\frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

51. $\sin x + \cos 2x + 2 = 0$.

$\sin x + 1 - 2\sin^2 x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sin x - 3 = 0$;

обозначим $\sin x = y$; $|y| \leqslant 1$.

$2y^2 - y - 3 = 0 \Leftrightarrow y_{1,\,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \dfrac{1 \pm 5}{4} \Leftrightarrow y_1 = -1$ и $y_2 = \dfrac{3}{2}$ (не подходит, т. к. $y \leqslant 1$).

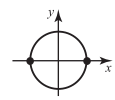
$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Ответ: $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$.

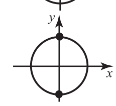
Здесь использована специальная формула, отличная от стандартной для уравнения $\sin x = a$.

Существуют следующие специальные формулы:

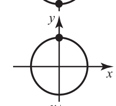
1) $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n,\ n \in Z$;



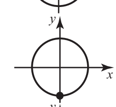
2) $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$;



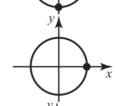
3) $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$;



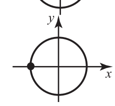
4) $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$;



5) $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi n,\ n \in Z$;



6) $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$.



Следует заметить также, что буква для обозначения целого числа может быть выбрана любая, но принято брать n, k, m, …

Если уравнение имеет два и более решений, эти буквы принято брать различными.

52. $2\cos x(\cos x - \sqrt{8}\ \mathrm{tg}\, x) = 5$.

$$\begin{cases} 2\cos^2 x - 4\sqrt{2}\,\cancel{\cos x}\dfrac{\sin x}{\cancel{\cos x}} = 5, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 2\sin^2 x - 4\sqrt{2}\sin x - 5 = 0, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin^2 x + 4\sqrt{2}\,\sin x + 3 = 0, \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$$

$\sin x = y$; $|y| \leqslant 1$; $2y^2 + 4\sqrt{2}\,y + 3 = 0 \Leftrightarrow \cos x \neq 0$;

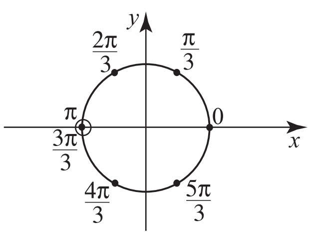
$y_{1,\,2} = \dfrac{-2\sqrt{2} \pm \sqrt{8-6}}{2} = \dfrac{-2\sqrt{2} \pm \sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow y_1 = -3$ (не подходит, т. к. $y \geqslant -1$);

$y_2 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = (-1)^k\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + \pi k,\ k \in Z \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z.$

Ответ: $(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z.$

53. $\cos x \cos 6x = -1.$

Т. к. $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ и $-1 \leqslant \cos 6x \leqslant 1$, то возможны только два случая:

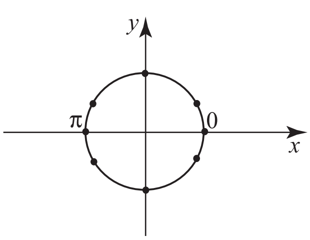


$$1)\ \begin{cases} \cos x = -1, \\ \cos 6x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z, \\ 6x = 2\pi k,\ k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z, \\ x = \dfrac{\pi k}{3},\ k \in Z. \end{cases}$$

Т. к. решения 1-го и 2-го уравнений должны совпадать, то, как видно на окружности, единственно возможная точка соответствует решению $x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$.



$$2)\ \begin{cases} \cos x = 1, \\ \cos 6x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\pi n,\ n \in Z, \\ 6x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\pi n,\ n \in Z, \\ x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi k}{3},\ k \in Z. \end{cases}$$

Эта система, как видно на окружности, решений не имеет.

Ответ: $x = \pi(2n+1),\ n \in Z.$

54. $\sqrt{\cos 2x} = 1 + 2\sin x$.

$$\begin{cases} \cos 2x = (1+2\sin x)^2, \\ 1 + 2\sin x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2\sin^2 x = 1 + 4\sin x + 4\sin^2 x, \\ \sin x \geqslant -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\sin^2 x + 4\sin x = 0, \\ \sin x \geqslant -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin x(3\sin x + 2) = 0, \\ \sin x \geqslant -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \text{ и } \sin x = -\dfrac{2}{3}, \\ \sin x \geqslant -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n,\ n \in Z$.

Ответ: $\pi n,\ n \in Z$.

55. $\sin x + \cos x = 1 + \sin 2x$.

$\sin x + \cos x = \sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x \Leftrightarrow \sin x + \cos x = (\sin x + \cos x)^2 \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\sin x + \cos x - 1) = 0$.

1) $\sin x + \cos x = 0$; делим обе части на $\cos x$, это возможно, т. к. $\cos x \neq 0$ (если $\cos x = 0$, то из уравнения $\sin x = 0$, что невозможно.)

$\operatorname{tg} x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$.

2) $\sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin x + \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{x + \frac{\pi}{2} - x}{2}\cos\frac{x - \frac{\pi}{2} + x}{2} = 1 \Leftrightarrow 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

$x_1 = 2\pi n,\ n \in Z$; $x_2 = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in Z$.

Ответ: $-\dfrac{\pi}{4} + \pi k$; $2\pi n$; $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi m$, $k, n, m \in Z$.

56. $\sin x + \cos x = \sqrt{1 + \operatorname{tg} x}$.

$$\begin{cases} (\sin x + \cos x)^2 = 1 + \operatorname{tg} x, \\ \sin x + \cos x \geqslant 0, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sin x + \cos x)^2 = 1 + \dfrac{\sin x}{\cos x}, \\ \sin x + \cos x \geqslant 0, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

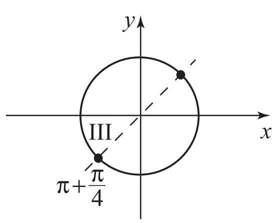
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sin x + \cos x)^2 - \dfrac{\sin x + \cos x}{\cos x} = 0, \\ \sin x + \cos x \geqslant 0, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sin x + \cos x)\left(\sin x + \cos x - \dfrac{1}{\cos x}\right) = 0, \\ \sin x + \cos x \geqslant 0, \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$$

1) $\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$

2) $\dfrac{\sin x \cos x + \cos^2 x - 1}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow \sin x \cos x - \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \sin(\cos x - \sin x) = 0.$

а) $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi k,\ k \in Z$; $\cos \pi k = \pm 1$, т. к. $\sin x + \cos x \geqslant 0 \Rightarrow \cos x = 1$ и $x = 2\pi k,\ k \in Z.$



б) $\cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \pi m,\ m \in Z.$

Отметим эти решения на окружности.

В III четверти $\sin x < 0$ и $\cos x < 0 \Rightarrow \sin x + \cos x < 0$, что не соответствует ограничениям. Поэтому $x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in Z$.

О т в е т: $-\dfrac{\pi}{4} + \pi n$; $2\pi k$; $\dfrac{\pi}{4} + 2\pi m$, $n,\ k,\ m \in Z$.

Решение уравнений

РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. $\dfrac{x^2-9}{x-3}=6;$

$$\frac{x^2-9}{x-3}-6=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-9-6x+18}{x-3}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6x+9=0 \\ x\neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2=0 \\ x\neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x\neq 3 \end{cases}$$

Ответ: $\varnothing$.

2. $\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{4}{x^2-4};\ x\neq -2$ и $x\neq 2$.

$$\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}=0 \Leftrightarrow \frac{x+2-4}{x^2-4}=0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x^2-4}=0;\ x-2=0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x=2$, но $x\neq 2$.

Ответ: $\varnothing$.

3. $\dfrac{1-x}{(2-x)(x-3)}+1=\dfrac{1}{2-x};\ x\neq 2$ и $x\neq 3$.

$$\frac{1-x}{(2-x)(x-3)}+1-\frac{1}{2-x}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-x+2x-x^2-6+3x-x+3}{(2-x)(x-3)}=0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+3x-2}{(2-x)(x-3)}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+2=0 \\ x\neq 2;\ x\neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=1;\ x_2=2 \\ x\neq 2;\ x\neq 3 \end{cases}$$

Ответ: $x=1$.

4. $x^4=(5x+6)^2$.

$x^4-(5x+6)^2=0 \Leftrightarrow (x^2-5x-6)(x^2+5x+6)=0.$

а) $x^2-5x-6=0 \Leftrightarrow x_1=-1$ и $x_2=6$.

б) $x^2+5x+6=0 \Leftrightarrow x_1=-3$ и $x_2=-2$.

Ответ: $-3;\ -2;\ -1;\ 6$.

5. $8x^6=1-3x+3x^2-x^3$.

$8x^6=(1-x)^3 \Leftrightarrow 2x^2=1-x \Leftrightarrow 2x^2+x-1=0;$

$x_{1,\,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \dfrac{-1 \pm 3}{4}$; $x_1 = -1$; $x_2 = \dfrac{1}{2}$.

Ответ: -1 и $\dfrac{1}{2}$.

6. $x^4 = (x+2)^8$.

$x^4 - (x+2)^8 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - (x+2)^4)(x^2 + (x+2)^4) = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow (x - (x+2)^2)(x + (x+2)^2) = 0$.

а) $x - x^2 - 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 4 = 0$ — не имеет корней, т. к. $D < 0$;

б) $x^2 + 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -4$; $x_2 = -1$.

Ответ: -4 и -1.

7. $x^4 = 2x^2 + 8$.

$x^4 - 2x^2 - 8 = 0$; $x^2 = y > 0$.
$y^2 - 2y - 8 = 0 \Leftrightarrow y_1 = -2$ — не подходит; $y_2 = 4$.
$x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Ответ: -2 и 2.

8. $\dfrac{1}{x(x+2)} - \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{12}$; $x \neq -2$; $x \neq -1$; $x \neq 0$;

$\dfrac{1}{x^2+2x} - \dfrac{1}{x^2+2x+1} = \dfrac{1}{12}$. Обозначим $x^2 + 2x = y$.

$\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{y+1} = \dfrac{1}{12}$;

$\dfrac{\cancel{y} + 1 - \cancel{y}}{y(y+1)} = \dfrac{1}{12} \Leftrightarrow 12 = y^2 + y \Leftrightarrow y^2 + y - 12 = 0$; $y_1 = -4$ и $y_2 = 3$.

а) $x^2 + 2x = -4 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 4 = 0$ — корней нет, т. к. $D < 0$.
б) $x^2 + 2x - 3 = 0$; $x_1 = -3$ и $x_2 = 1$.

Ответ: -3 и 1.

9. $(x+1)(x+2)(x-3)(x-4) = 24$.

$(x^2 - 2x - 3)(x^2 - 2x - 8) = 24$. Обозначим $x^2 - 2x = y$;

$(y-3)(y-8) = 24$;
$y^2 - 11y + 24 = 24 \Leftrightarrow y(y-11) = 0$;

$y_1 = 0$ и $y_2 = 11$.
а) $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0$; $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$.
б) $x^2 - 2x - 11 = 0 \Leftrightarrow x_{1,\,2} = 1 \pm \sqrt{12}$.
Ответ: $1 - 2\sqrt{3}$; 0; 2; $1 + 2\sqrt{3}$.

10. $(x+3)^4+(x+5)^4=16.$

$x+3=y$; $y^4+(y+2)^2=4^2 \Leftrightarrow (y+2)^4=(4-y^2)(4+y^2) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (y+2)^4-(y+2)(2-y)(4+y^2)=0 \Leftrightarrow (y+2)(y^3+6y^2+$ $+12y+8-8+4y-2y^2+y^3)=0.$

а) $y+2=0 \Leftrightarrow y=-2$;

$x+3=-2 \Leftrightarrow x=-5.$

б) $2y^3+4y^2+16y=0 \Leftrightarrow 2y(y^2+2y+8)=0$;

$y=0 \Leftrightarrow x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$;

$y^2+2y+8=0$ не имеет корней, т. к. $D<0$.

Ответ: -5 и -3.

11. $x^4-5x^3+6x^2-5x+1=0.$

$x \neq 0$; разделим уравнение на x^2, получим $x^2-5x+6-\dfrac{5}{x}+$ $+\dfrac{1}{x^2}=0$, $x^2+\dfrac{1}{x^2}-5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+6=0,$

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2-5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+6=0,$

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+4=0$, $x+\dfrac{1}{x}=z.$

$z^2-5z+4=0 \Rightarrow z_1=1$ и $z_2=4$.

1) $x+\dfrac{1}{x}=1 \Rightarrow x^2-x+1=0$ не имеет корней, т. к. $D<0$.

2) $x+\dfrac{1}{x}=4 \Rightarrow x^2-4x+1=0 \Rightarrow x_{1,\,2}=2\pm\sqrt{3}$.

Ответ: $2-\sqrt{3}$ и $2+\sqrt{3}$.

12. $2x^5+3x^4-5x^3-5x^2+3x+2=0.$

$2(x^5+1)+3x(x^3+1)-5x^2(x+1)=0,$

$2(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)+3x(x+1)(x^2-x+1)-$ $-5x^2(x+1)=0,$

$(x+1)(2x^4-2x^3+2x^2-2x+2+3x^3-3x^2+3x-5x^2)=0.$

1) $x+1=0 \Rightarrow x=-1.$

2) $2x^4+x^3-6x^2+x+2=0$, $x\neq 0$, делим на x^2.

$2x^2+x-6+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}=0,$

$2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-6=0,$

$2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-4+\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-6=0$, обозначим $x+\dfrac{1}{x}=z$,

$2z^2+z-10=0 \Rightarrow z_{1,\,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+80}}{4}=\dfrac{-1\pm 9}{4}$, $z_1=-2{,}5$; $z_2=2.$

1) $x+\dfrac{1}{x}=-2{,}5 \Rightarrow x^2+2{,}5x+1=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{1,\,2}=\dfrac{-2{,}5\pm\sqrt{6{,}25-4}}{2}=\dfrac{-2{,}5\pm1{,}5}{2}$; $x_1=-2$ и $x_2=-0{,}5$.

2) $x+\dfrac{1}{x}=2 \Rightarrow x^2+2x+1=0 \Rightarrow (x-1)^2=0 \Rightarrow x=1$.

Ответ: -2; $-0{,}5$; 1.

13. $\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)=5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$, $x\neq0$.

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3 = x^3+3x+3\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}=x^3+\dfrac{1}{x^3}+3\left(x+\dfrac{1}{x}\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$.

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$; $x+\dfrac{1}{x}=z$ (z — новая переменная).

$z^3-3z-5z=0 \Rightarrow z^3-8z=0 \Rightarrow z(z^2-8)=0 \Rightarrow z_1=0$; $z_2=-2\sqrt{2}$; $z_3=2\sqrt{2}$.

1) $x+\dfrac{1}{x}=0 \Rightarrow x^2+1=0 \Rightarrow \varnothing$.

2) $x+\dfrac{1}{x}=-2\sqrt{2} \Rightarrow x^2+2\sqrt{2}\,x+1=0 \Rightarrow x_{1,\,2}=-\sqrt{2}\pm$
$\pm\sqrt{2-1} \Rightarrow x_{1,\,2}=-\sqrt{2}\pm1$.

3) $x+\dfrac{1}{x}=2\sqrt{2} \Rightarrow x^2-2\sqrt{2}\,x+1=0 \Rightarrow x_{1,\,2}=-\sqrt{2}\pm1$.

Ответ: $-\sqrt{2}-1$; $-\sqrt{2}+1$; $\sqrt{2}-1$; $\sqrt{2}+1$.

14. $x(x+3)(x-3)(x+6)=40$.

$(x^2+3x)(x^2+3x-18)=40$, $x^2+3x=y$ (y — новая переменная).

$y(y-18)=40 \Rightarrow y^2-18y-40=0 \Rightarrow y_{1,\,2}=9\pm\sqrt{81+40} \Rightarrow$
$\Rightarrow y_{1,\,2}=9\pm11 \Rightarrow y_1=-2$; $y_2=20$.

1) $x^2+3x=-2 \Rightarrow x^2+3x+2=0 \Rightarrow x_{1,\,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{9+80}}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow x_{1,\,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{89}}{2}$.

Ответ: $\dfrac{-3-\sqrt{89}}{2}$; -2; -1; $\dfrac{-3+\sqrt{89}}{2}$.

15. $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{48}{x^2}=10\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{4}{x}\right)$.

$$\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)^2=\frac{x^2}{9}-2\cdot\frac{4}{3}+\frac{16}{x^2}=\frac{1}{3}\frac{x^2}{3}+\frac{1}{3}\frac{48}{x^2}-\frac{8}{3}=$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}\right)-\frac{8}{3}\Rightarrow\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=3\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)^2+8.$$

$\frac{x}{3}-\frac{4}{x}=y$; ($y$ — новая переменная).

$3y^2+8-10y=0\Rightarrow 3y^2-10y+8=0\Rightarrow$

$$\Rightarrow y_{1,\,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{3}\Rightarrow y_{1,\,2}=\frac{5\pm1}{3}\Rightarrow y_1=\frac{4}{3};\ y_2=2.$$

1) $\frac{x}{3}-\frac{4}{x}=\frac{4}{3}\Rightarrow x^2-12-4x=0\Rightarrow x^2-4x-12=0\Rightarrow$ $\Rightarrow x_1=-2;\ x_2=6.$

2) $\frac{x}{3}-\frac{4}{x}=2\Rightarrow x^2-12-6x=0\Rightarrow x^2-6x-12=0\Rightarrow$ $\Rightarrow x_{1,\,2}=3\pm\sqrt{9+12}\Rightarrow x_{1,\,2}=3\pm\sqrt{21}$.

Ответ: $-2;\ 3-\sqrt{21};\ 6;\ 3+\sqrt{21}$.

УРАВНЕНИЯ С МОДУЛЕМ

1. $|5x-13|-|6-5x|=7.$

1) $\begin{cases}5x-13\geqslant 0,\\ 6-5x\geqslant 0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant\frac{13}{5},\\ x\leqslant\frac{6}{5};\end{cases}\ \varnothing$

2) $\begin{cases}5x-13\geqslant 0,\\ 6-5x<0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant\frac{13}{5},\\ x>\frac{6}{5};\end{cases}\Leftrightarrow x\geqslant\frac{13}{5}.$

$\cancel{5x}-13+6-\cancel{5x}=7\Leftrightarrow -7=7\ \varnothing$

3) $\begin{cases}5x-13<0,\\ 6-5x\geqslant 0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<\frac{13}{5},\\ x\leqslant\frac{6}{5};\end{cases}\Leftrightarrow x\leqslant\frac{6}{5}.$

$-\cancel{5x}+13-6+\cancel{5x}=7\Rightarrow 7=7$

4) $\begin{cases}5x-13<0,\\ 6-5x<0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<\frac{13}{5},\\ x>\frac{6}{5};\end{cases}\Leftrightarrow\frac{6}{5}<x<\frac{13}{5}.$

$-5x+13+6-5x=7\Rightarrow -10x=-12\Rightarrow x=\frac{6}{5}$ не подходит, т. к. $x>\frac{6}{5}$.

Ответ: $x\in\left(-\infty;\ \frac{6}{5}\right]$.

2. $x^2+4|x-3|-7x+11=0$.

1) $x-3\geqslant 0 \Rightarrow x\geqslant 3$.

$x^2+4x-12-7x+11=0 \Rightarrow x^2-3x-1=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{1,\,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{9+4}}{2}=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$.

$x=\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$ не подходит, т. к. $x\geqslant 3$.

$\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}>3 \Rightarrow 3+\sqrt{13}>6 \Rightarrow \sqrt{13}>3 \Rightarrow 13>9$ верно.

2) $x-3<0 \Rightarrow x<3$.

$x^2-4x+12-7x+11=0 \Rightarrow x^2-11x+23=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{1,\,2}=\dfrac{11\pm\sqrt{121-92}}{2}=\dfrac{11\pm\sqrt{29}}{2}$.

$x=\dfrac{11+\sqrt{29}}{2}$ не подходит, т. к. $x<3$.

$\dfrac{11-\sqrt{29}}{2}<3 \Rightarrow 11-\sqrt{29}<6 \Rightarrow \sqrt{29}>5 \Rightarrow 29>25$ верно.

О т в е т: $\dfrac{11-\sqrt{29}}{2}$; $\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.

3. $\dfrac{|x-3|}{|x-2|-1}=1$.

1) $\begin{cases} x-3\geqslant 0, \\ x-2\geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 3, \\ x\geqslant 2; \end{cases} \Leftrightarrow x\geqslant 3$.

$\dfrac{x-3}{x-3}=1,\ x\neq 3 \Rightarrow x>3$.

2) $\begin{cases} x-3\geqslant 0, \\ x-2<0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 3, \\ x<2; \end{cases} \Rightarrow \varnothing$

3) $\begin{cases} x-3<0 \\ x-2\geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3 \\ x\geqslant 2; \end{cases} \Leftrightarrow 2\leqslant x<3$.

$\dfrac{-x+3}{x-3}=1, \quad \varnothing$

4) $\begin{cases} x-3<0, \\ x-2<0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3, \\ x<2; \end{cases} \Leftrightarrow x<2$.

$\dfrac{-x+3}{-x+2-1}=1 \Leftrightarrow \dfrac{3-x}{1-x}=1,\ x\neq 1$.

$3-x=1-x,\ \varnothing$.

О т в е т: $x\in(3;\infty)$.

4. $|2x+5| = |x| + 2$.

1) $\begin{cases} 2x+5 \geqslant 0, \\ x \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geqslant -5, \\ x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geqslant 0.$

$2x+5 = x+2 \Leftrightarrow x = -3$ не подходит.

2) $\begin{cases} 2x+5 \geqslant 0, \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -\frac{5}{2}, \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \leqslant x < 0.$

$2x+5 = -x+2 \Leftrightarrow 3x = -3 \Leftrightarrow x = -1.$

3) $\begin{cases} 2x+5 < 0 \\ x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{5}{2}, \\ x \geqslant 0; \end{cases} \varnothing$

4) $\begin{cases} 2x+5 < 0 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{5}{2}, \\ x < 0; \end{cases} \Leftrightarrow x < -\frac{5}{2}.$

$-2x-5 = -x+2 \Leftrightarrow x = -7.$

Ответ: -7; -1.

5. $|x^2-4x+3| + |x^2-5x+6| = 1$.

1) $\begin{cases} x^2-4x+3 \geqslant 0, \\ x^2-5x+6 \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-3) \geqslant 0, \\ (x-2)(x-3) \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 1 \text{ и } x \geqslant 3, \\ x \leqslant 2 \text{ и } x \geqslant 3; \end{cases} \Leftrightarrow x \leqslant 1 \text{ и } x \geqslant 3.$

$x^2 - 4x + 3 + x^2 - 5x + 6 - 1 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 9x + 8 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_{1,\,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-64}}{4} = \frac{9 \pm \sqrt{17}}{4}.$

$\frac{9-\sqrt{17}}{4} < 1 \Rightarrow \sqrt{17} > 5 \Rightarrow 17 > 25$ неверно.

$\frac{9-\sqrt{17}}{4} > 3 \Rightarrow \sqrt{17} < -3$ неверно.

$\frac{9+\sqrt{17}}{4} > 3 \Rightarrow \sqrt{17} > 3 \Rightarrow 17 > 9$ верно.

2) $\begin{cases} x^2-4x+3 \geqslant 0, \\ x^2-5x+6 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 1 \text{ и } x \geqslant 3, \\ 2 < x; \end{cases} \varnothing$

3) $\begin{cases} x^2-4x+3 < 0, \\ x^2-5x+6 \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 3, \\ x \leqslant 2 \text{ и } x \geqslant 3; \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x \leqslant 2.$

$-\cancel{x^2} + 4x - 3 + \cancel{x^2} - 5x + 6 - 1 = 0 \Rightarrow -x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2.$

4) $\begin{cases} x^2-4x+3 < 0, \\ x^2-5x+6 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 3, \\ 2 < x < 3; \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x < 3.$

$-x^2 + 4x - 3 - x^2 + 5x - 6 - 1 = 0;$

$-2x^2 + 9x - 10 = 0;\ 2x^2 - 9x + 10 = 0;$

$x_{1,\,2} = \dfrac{9 \pm \sqrt{81-80}}{4} = \dfrac{9 \pm 1}{4}$; $x_1 = 2$ и $x_2 = \dfrac{5}{2}$.
$x = 2$ не подходит.

Ответ: 2; $\dfrac{5}{2}$; $\dfrac{9+\sqrt{17}}{4}$.

6. $|x^2 + x| + 3x - 5 = 0$.
1) $x^2 + x \geqslant 0 \Leftrightarrow x(x+1) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -1$ и $x \geqslant 0$.
$x^2 + x + 3x - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0; \Leftrightarrow x_1 = -5$ и $x_2 = 1$.
2) $x^2 + x < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0$.
$-x^2 - x + 3x - 5 = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x_{1,\,2} = 1 \pm \sqrt{1-5}$, нет решений, т. к. $D < 0$.

Ответ: -5; 1.

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. $\sqrt{1 + 4x - x^2} = x - 1$;
$x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$.
$1 + 4x - x^2 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x(x-3) = 0$;
$x_1 = 0$ и $x_2 = 3$.
$x = 0$ не подходит, т. к. $x \geqslant 1$.

Ответ: $x = 3$.

2. $x + \sqrt{2x^2 - 7x + 5} = 1$.
$\sqrt{2x^2 - 7x + 5} = 1 - x$; $1 - x \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 1$.
$2x^2 - 7x + 5 = 1 - 2x + x^2 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$; $x_2 = 4$.
$x = 4$ не подходит, т. к. $x \leqslant 1$.

Ответ: 1.

3. $\dfrac{\sqrt{x+7}}{\sqrt{x+2}} = \dfrac{3\sqrt{x-1}}{\sqrt{3x-2}}$.

$$\begin{cases} x + 7 \geqslant 0, \\ x + 2 > 0, \\ x - 1 \geqslant 0, \\ 3x - 2 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -7, \\ x > -2, \\ x \geqslant 1, \\ x > \dfrac{2}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow x \geqslant 1.$$

$\dfrac{x+7}{x+2} = \dfrac{9x-9}{3x-2} \Leftrightarrow 3x^2 + 21x - 2x - 14 = 9x^2 - 9x + 18x - 18$.
$6x^2 - 10x - 4 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 5x - 2 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_{1,\,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \dfrac{5 \pm 7}{6}$; $x_1 = 2$; $x_2 = -\dfrac{1}{3}$.

$x = -\frac{1}{3}$ не подходит, т. к. $x \geqslant 1$.

Ответ: 2.

4. $2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} = 2$.

$\begin{cases} x-1 \geqslant 0, \\ x+3 \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1, \\ x \geqslant -3; \end{cases} \Leftrightarrow x \geqslant 1.$

$4(x-1) + 4\sqrt{(x-1)(x+3)} + x + 3 = 4,$

$4\sqrt{(x-1)(x+3)} = 5 - 5x$; $5 - 5x \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 1$.

Отсюда $x = 1$.

Ответ: 1.

5. $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-1} = \sqrt{2x-3}$.

$\begin{cases} x+2 \geqslant 0, \\ x-1 \geqslant 0, \\ 2x-3 \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -2, \\ x \geqslant 1, \\ x \geqslant \frac{3}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow x \geqslant \frac{3}{2}.$

$\sqrt{x+2} = \sqrt{x-1} + \sqrt{2x-3}$,

$\cancel{x} + 2 = \cancel{x} - 1 + 2\sqrt{(x-1)(2x-3)} + 2x - 3,$

$2\sqrt{(x-1)(2x-3)} = 6 - 2x$; $6 - 2x \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 3$.

$\sqrt{(x-1)(2x-3)} = 3 - x,$

$2x^2 - 5x + 3 = 9 - 6x + x^2 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = -3$ и $x_2 = 2$; $\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant 3$.

Ответ: $x = 2$.

6. $x^2 + 11 + \sqrt{x^2 + 11} = 42$.

$x^2 + 11 > 0$ при всех x; $\sqrt{x^2 + 11} = y > 0$.

$y^2 + y - 42 = 0 \Rightarrow y_1 = -7$ и $y_2 = 6$.

$y = -7$ не подходит, т. к. $y > 0$.

$\sqrt{x^2 + 11} = 6 \Rightarrow x^2 + 11 = 36 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$.

Ответ: -5; 5.

7. $\sqrt{x\sqrt[5]{x}} - \sqrt[5]{x\sqrt{x}} = 56$; $x \geqslant 0$.

$\sqrt{x^{\frac{6}{5}}} - \sqrt[5]{x^{\frac{3}{2}}} = 56 \Rightarrow x^{\frac{6}{10}} - x^{\frac{3}{10}} = 56;$

$x^{\frac{3}{10}} = y \geqslant 0;$

$y^2 - y - 56 = 0 \Rightarrow y_1 = 8$ и $y_2 = -7$.

$y_2 = -7$ не подходит, т. к. $y \geqslant 0$.

$x^{\frac{3}{10}} = 8 \Rightarrow x = 8^{\frac{10}{3}} \Rightarrow x = \sqrt[3]{8^{10}} = 2^{10} = 1024.$

Ответ: 1024.

8. $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4$.

$x+\cancel{\sqrt{x+11}}+2\sqrt{x^2-x-1}+x-\cancel{\sqrt{x+11}}=16;$

$2\sqrt{x^2-x-11}=16-2x \Rightarrow \sqrt{x^2-x-11}=8-x.$

$\cancel{x^2}-x-11=64-16x+\cancel{x^2} \Rightarrow 15x=75 \Rightarrow x=5.$

Проверка: $\sqrt{5+4}+\sqrt{5-4}=4$.

Ответ: 5.

9. $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=3$.

$\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}=3\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x} \Rightarrow 4\sqrt[3]{x}=2\sqrt{x} \Rightarrow 2\sqrt[3]{x}=\sqrt{x} \Rightarrow$ $\Rightarrow (2\sqrt[3]{x})^6=(\sqrt{x})^6 \Rightarrow 64x^2=x^3 \Rightarrow 64x^2-x^3=0 \Rightarrow x^2(64-x)=$ $=0 \Rightarrow x_1=0$ и $x_2=64$.

Проверка: $x=0$ не подходит;

$\dfrac{\sqrt{64}+\sqrt[3]{64}}{\sqrt{64}-\sqrt[3]{64}}=\dfrac{8+4}{8-4}=\dfrac{12}{4}=3.$

Ответ: 64.

10. $\sqrt[3]{x+44}-\sqrt[3]{x-19}=3$.

$(\sqrt[3]{x+44})^3=(3+\sqrt[3]{x-19})^3;$

$\cancel{x}+44=27+3\cdot 9\sqrt[3]{x-19}+3\cdot 3\sqrt[3]{(x-19)^2}+\cancel{x}-19,$

$9(\sqrt[3]{x-19})^2+27\sqrt[3]{x-19}-36=0;$

$\sqrt[3]{x-19}=y.$

$y^2+3y-4=0 \Rightarrow y_1=-4$ и $y_2=1$.

1) $\sqrt[3]{x-19}=-4 \Rightarrow x-19=-64 \Rightarrow x=-45;$

2) $\sqrt[3]{x-19}=1 \Rightarrow x-19=1 \Rightarrow x=20.$

Ответ: -45; 20.

11. $\dfrac{x-\sqrt{x+5}}{x+\sqrt{x+5}}=\dfrac{1}{7}$.

$$\begin{cases} x+5\geqslant 0, \\ x+\sqrt{x+5}\neq 0, \\ 7x-7\sqrt{x+5}=x+\sqrt{x+5}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant -5, \\ \sqrt{x+5}\neq -x, \\ 6x=8\sqrt{x+5}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant -5, \\ x\geqslant 0, \\ 9x^2=16x+80; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 0, \\ 9x^2-16x-80=0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 0, \\ x_{1,\,2}=\dfrac{8\pm\sqrt{64+720}}{9}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 0, \\ x_1=-\dfrac{20}{9};\ x_2=4; \end{cases} \Leftrightarrow x_2=4.$$

Ответ: $x=4$.

12. $\sqrt{225+x^2} = x^2-47$.

$\begin{cases} x^2-47 \geqslant 0, \\ 225+x^2 = x^4-94x^2+2209; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant -\sqrt{47} \text{ и } x \geqslant \sqrt{47}, \\ x^4-95x^2+1984=0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant -\sqrt{47} \text{ и } x \geqslant \sqrt{47}, \\ x^2_{1,\,2} = \dfrac{95 \pm \sqrt{9025+7936}}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant -\sqrt{47} \text{ и } x \geqslant \sqrt{47}, \\ x_1^2 = 64;\ x_2^2 = 31. \end{cases}$

$x^2 = 64 \Rightarrow x = \pm 8$.

Ответ: -8; 8.

13. $2\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[6]{x} - 18 = 0$; $x \geqslant 0$, $\sqrt[6]{x} = y \geqslant 0$.

$2y^2+5y-18=0 \Rightarrow y_{1,\,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25+144}}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow y_{1,\,2} = \dfrac{-5 \pm 13}{4} \Rightarrow y_1 = -\dfrac{9}{2}$ и $y_2 = 2$.

$y_1 = -\dfrac{9}{2}$ не подходит, т. к. $y \geqslant 0$.

$\sqrt[6]{x} = 2 \Rightarrow x = 2^6 \Rightarrow x = 64$.

Ответ: 64.

14. $\sqrt[7]{\dfrac{5-x}{x+3}} + \sqrt[7]{\dfrac{x+3}{5-x}} = 2$; $x \neq -3$; $x \neq 5$.

$\sqrt[7]{\dfrac{5-x}{x+3}} = y$; $y + \dfrac{1}{y} = 2 \Rightarrow y^2-2y+1=0 \Rightarrow (y-1)^2 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow y = 1$.

$\sqrt[7]{\dfrac{5-x}{x+3}} = 1 \Rightarrow \dfrac{5-x}{x+3} = 1 \Rightarrow 5-x = x+3 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$.

Ответ: 1.

15. $x^2+3x-18+4\sqrt{x^2+3x-6} = 0$.

$\sqrt{x^2+3x-6} = z \geqslant 0$.

$z^2-12+4z=0 \Rightarrow z^2+4z-12=0 \Rightarrow z_1 = -6$ и $z_2 = 2$.

$z = -6$ не подходит, т. к. $z \geqslant 0$.

$\sqrt{x^2+3x-6} = 2 \Rightarrow x^2+3x-6 = 4 \Rightarrow x^2+3x-10=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_1 = -5$ и $x_2 = 2$.

Ответ: -5 и 2.

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. $3 \cdot 2^{x+1} + 5 \cdot 2x - 2^{x+2} = 21$.

$6 \cdot 2^x + 5 \cdot 2^x - 4 \cdot 2^x = 21 \Rightarrow 7 \cdot 2^x = 21 \Rightarrow 2^x = 3 \Rightarrow x = \log_2 3$.

Ответ: $\log_2 3$.

2. $(0{,}2)^{x^2-16x+37{,}5} = 5\sqrt{5}\,.$

$5^{-x^2+16x-37{,}5} = 5^{\frac{3}{2}} \Rightarrow -x^2 + 16x - 37{,}5 = 1{,}5 \Rightarrow x^2 - 16x + 39 = 0 \Rightarrow x_1 = 3$ и $x_2 = 13.$

Ответ: 3; 13.

3. $5^{3x+1} + 34 \cdot 5^{2x} = 7 \cdot 5^x.$

$5 \cdot 5^{3x} + 34 \cdot 5^{2x} - 7 \cdot 5^x = 0;\ 5^x = y > 0.$
$5y^3 + 34y^2 - 7y = 0 \Rightarrow y(5y^2 + 34y - 7) = 0.$

1) $y = 0$ — не подходит.

2) $5y^2 + 34y - 7 = 0 \Rightarrow y_{1,\,2} = \dfrac{-17 \pm \sqrt{289 + 35}}{5} \Rightarrow y_1 = -7;$ $y_2 = \dfrac{1}{5}$; $y = -7$ не подходит.

$5x = \dfrac{1}{5} \Rightarrow 5x = 5^{-1} \Rightarrow x = -1.$

Ответ: -1.

4. $2 \cdot 25^x - 5 \cdot 10^x + 2 \cdot 4^x = 0.$

$2 \cdot 5^{2x} - 5 \cdot 2^x \cdot 5^x + 2 \cdot 2^{2x} = 0 \mid\ : 2^{2x},$

$2 \cdot \left(\dfrac{5}{2}\right)^{2x} - 5 \cdot \left(\dfrac{5}{2}\right)^{x} + 2 = 0,\ \left(\dfrac{5}{2}\right)^{x} = y > 0.$

$2y^2 - 5y + 2 = 0 \Rightarrow y_{1,\,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} \Rightarrow y_{1,\,2} = \dfrac{5 \pm 3}{4} \Rightarrow y_1 = \dfrac{1}{2}$ и $y_2 = 2.$

1) $\left(\dfrac{5}{2}\right)^{x} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \log_{\frac{5}{2}} \dfrac{1}{2} = -\log_{\frac{5}{2}} 2;$

2) $\left(\dfrac{5}{2}\right)^{x} = 2 \Rightarrow x = \log_{\frac{5}{2}} 2.$

Ответ: $-\log_{\frac{5}{2}} 2;\ \log_{\frac{5}{2}} 2.$

5. $3 \cdot 9^{\frac{1}{x}} + 6^{\frac{1}{x}} = 2 \cdot 4^{\frac{1}{x}};\ x \neq 0.$
$3 \cdot 3^{\frac{2}{x}} + 2^{\frac{1}{x}} \cdot 3^{\frac{1}{x}} - 2 \cdot 2^{\frac{2}{x}} = 0 \mid\ : 2^{\frac{2}{x}}.$

$3 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{2}{x}} + \left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} - 2 = 0;\ \left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = y > 0.$

$3y^2 + y - 2 = 0 \Rightarrow y_{1,\,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{6} \Rightarrow y_{1,\,2} = \dfrac{-1 \pm 5}{6} \Rightarrow y_1 = -1$ и $y_2 = \dfrac{2}{3}.$

$y = -1$ не подходит;

$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} \Rightarrow \frac{1}{x} = -1 \Rightarrow x = -1.$

Ответ: -1.

6. $2^{x+2} \cdot 5^{x+2} = 2^{3x} \cdot 5^{3x}$.

$10^{x+2} = 10^{3x} \Rightarrow x + 2 = 3x \Rightarrow x = 1.$

Ответ: 1.

7. $8^{\frac{2}{x}} - 2^{\frac{3x+3}{x}} + 12 = 0;\ x \neq 0.$

$8^{\frac{2}{x}} - 2^3 \cdot 2^{\frac{3}{x}} + 12 = 0;$

$(8^{\frac{1}{x}})^2 - 8 \cdot 8^{\frac{1}{x}} + 12 = 0;\ 8^{\frac{1}{x}} = y > 0.$

$y^2 - 8y + 12 = 0 \Rightarrow y_{1,\,2} = 4 \pm \sqrt{16 - 12} \Rightarrow y_1 = 2$ и $y_2 = 6$.

1) $8^{\frac{1}{x}} = 2 \Rightarrow 2^{\frac{3}{x}} = 2^1 \Rightarrow \frac{3}{x} = 1 \Rightarrow x = 3;$

2) $8^{\frac{1}{x}} = 6 \Rightarrow \frac{1}{x} = \log_8 6 \Rightarrow x = \frac{1}{\log_8 6} \Rightarrow x = \log_6 8.$

Ответ: $3;\ \log_6 8$.

8. $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2} = 2^{5-x} + 9.$

$2^{4-2x} = 2^{5-x} + 9 \Rightarrow 16 \cdot 2^{-2x} - 32 \cdot 2^{-x} - 9 = 0;$

$2^{-x} = y > 0;\ 16y^2 - 32y - 9 = 0.$

$y_{1,\,2} = \frac{16 \pm \sqrt{256 + 144}}{16} \Rightarrow y_{1,\,2} = \frac{16 \pm 20}{16} \Rightarrow y_1 = -\frac{1}{4}$ и $y_2 = \frac{9}{4}$.

$y = -\frac{1}{4}$ не подходит.

$2^{-x} = \frac{9}{4} \Rightarrow -x = \log_2 \frac{9}{4} \Rightarrow x = \log_2 \frac{4}{9} \Rightarrow x = 2 - 2\log_2 3.$

Ответ: $2 - 2\log_2 3$.

9. $5^x \cdot 8^{\frac{x-1}{x}} = 500;\ x \neq 0.$

$5^x \cdot 8^{1-\frac{1}{x}} = 5^3 \cdot 2^2;$

$5^{x-3} = 2^{2-3+\frac{3}{x}} \Rightarrow 5^{x-3} = 2^{\frac{3-x}{x}} \Rightarrow 5^{x-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x-3}{x}}.$

Логарифмируем по основанию 5:

$(x-3)\log_5 5 = \frac{x-3}{x}\log_5 \frac{1}{2} \Rightarrow (x-3)\left(1 - \frac{1}{x}\log_5 \frac{1}{2}\right) = 0.$

1) $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3;$

2) $1 + \frac{1}{x}\log_5 2 = 0 \Rightarrow x + \log_5 2 = 0 \Rightarrow x = -\log_5 2.$

Ответ: $3;\ -\log_5 2$.

10. $49^{1+\sqrt{x-2}} - 344 \cdot 7^{\sqrt{x-2}} = -7.$

$x - 2 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 2.$

$49 \cdot 7^{2\sqrt{x-2}} - 344 \cdot 7^{\sqrt{x-2}} + 7 = 0;$

$7^{\sqrt{x-2}} = y > 0;$

$49y^2 - 344y + 7 = 0 \Rightarrow y_{1,\,2} = \dfrac{172 \pm \sqrt{29\,584 - 343}}{49} = \dfrac{172 \pm 171}{49}$; $y_1 = \dfrac{1}{49}$; $y_2 = 7$.

1) $7^{\sqrt{x-2}} = 7^{-2} \Rightarrow \sqrt{x-2} = -2$ невозможно.

2) $7^{\sqrt{x-2}} = 7 \Rightarrow \sqrt{x-2} = 1 \Rightarrow x = 3$.

Ответ: 3.

11. $\sqrt{2} = 4^{x^2 - \sqrt{x^2-9} - 20{,}75}$.

$x^2 - 9 \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant -3$ и $x \geqslant 3$.

$2^{\frac{1}{2}} = 2^{2x^2 - 2\sqrt{x^2-9} - 41{,}5} \Rightarrow 2x^2 - 2\sqrt{x^2-9} - 42 = 0 \Rightarrow \Rightarrow \sqrt{x^2-9} = x^2 - 21$; $x^2 = y \geqslant 0$;

$\sqrt{y-9} = y - 21$; $y - 21 \geqslant 0 \Rightarrow y \geqslant 21$.

$y - 9 = y^2 - 42y + 441 \Rightarrow y^2 - 43y + 450 = 0 \Rightarrow y_{1,\,2} = \dfrac{43 \pm \sqrt{1849 - 1800}}{2} \Rightarrow y_{1,\,2} = \dfrac{43 \pm 7}{2} \Rightarrow y_1 = 18$ и $y_2 = 25$.

$y = 18$ не подходит.

$x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$.

Ответ: -5; 5.

12. $\sqrt{2^{x^2-2x-10}} = \sqrt{33 + \sqrt{128}} - 1$.

$\sqrt{2^{x^2-2x-10}} = y > 0$; $y + 1 = \sqrt{33 + 8\sqrt{2}} \Leftrightarrow y^2 + 2y + 1 = 33 + 8\sqrt{2} \Rightarrow y^2 + 2y - 32 - 8\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow y_{1,\,2} = -1 \pm \sqrt{1 + 8\sqrt{2} + 32} = -1 \pm (1 + 4\sqrt{2})$; $y_1 = 4\sqrt{2}$; $y_2 = -2 - 4\sqrt{2}$.

y_2 не подходит, т. к. $y > 0$.

$2^{\frac{x^2-2x-10}{2}} = 2^{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 10 = 5 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 15 = 0$; $x_1 = -3$ и $x_2 = 5$.

Ответ: -3; 5.

13. $25^{|1-2x|} = 5^{4-6x}$.

1) $1 - 2x \geqslant 0 \Leftrightarrow 2x \leqslant 1 \Leftrightarrow x \leqslant \dfrac{1}{2}$.

$25^{1-2x} = 5^{4-6x} \Rightarrow 2 - 4x = 4 - 6x \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$ — не подходит.

2) $1 - 2x < 0 \Rightarrow x > \dfrac{1}{2}$.

$25^{2x-1} = 5^{4-6x} \Leftrightarrow 4x - 2 = 4 - 6x \Leftrightarrow 10x = 6 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{5} > \dfrac{1}{2}$.

Ответ: $\dfrac{3}{5}$.

14. $2^{x^2+x-6} - 2^{x^2+x-9} = 56.$

$2^{x^2+x-9} = y > 0;$

$8y - y = 56 \Leftrightarrow 7y = 56 \Leftrightarrow y = 8;$

$2^{x^2+x-9} = 2^3 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0;$

$x_1 = -4$ и $x = 3.$

Ответ: -4; 3.

15. $\sqrt{3^{x-54}} - 7\sqrt{3^{x-58}} = 162.$

$\sqrt{3^{x-58+4}} - 7\sqrt{3^{x-58}} = 162 \Leftrightarrow 9\sqrt{3^{x-58}} - 7\sqrt{3^{x-58}} = 162 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sqrt{3^{x-58}} = 81 \Leftrightarrow \dfrac{x-58}{2} = 4 \Leftrightarrow x - 58 = 8 \Leftrightarrow x = 66.$

Ответ: 66.

16. $3^{x+1} - 5^x + 3^{x-1} - 5^{x-1} = 5^{x-2} - 3^{x-2}.$

$3 \cdot 3^x + \dfrac{1}{3} \cdot 3^x + \dfrac{1}{9} \cdot 3^x = 5^x + \dfrac{1}{5} \cdot 5^x + \dfrac{1}{25} \cdot 5^x;$

$3^x\left(3 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9}\right) = 5^x\left(1 + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{25}\right);$

$3^x \cdot \dfrac{\cancel{31}}{9} = 5^x \cdot \dfrac{\cancel{31}}{25} \Leftrightarrow 3^{x-2} = 5^{x-2} \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$

Ответ: 2.

17. $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6.$

$x^2 - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2 \geqslant 2.$

$2^{2(x+\sqrt{x^2-2})} - \dfrac{5}{2} \cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}} - 6 = 0.$

$2^{x+\sqrt{x^2-2}} = y > 0;$

$y^2 - \dfrac{5}{2}y - 6 = 0 \Rightarrow 2y^2 - 5y - 12 = 0 \Rightarrow y_{1,\,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25+96}}{4} =$
$= \dfrac{5 \pm 11}{4} \Rightarrow y_1 = -\dfrac{3}{2}$ и $y_2 = 4.$

$y = -\dfrac{3}{2}$ не подходит, т. к. $y > 0.$

$2^{x+\sqrt{x^2-2}} = 2^2 \Rightarrow x + \sqrt{x^2-2} = 2 \Rightarrow \sqrt{x^2-2} = 2 - x;$
$2 - x \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 2;$

$\cancel{x^2} - 2 = 4 - 4x + \cancel{x^2} \Rightarrow 4x = 6 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2};\ \sqrt{2} < \dfrac{3}{2} < 2.$

Ответ: $\dfrac{3}{2}$.

18. $2^{x+2} + 8^x = 5 \cdot 4^x;\ 2^x = z > 0.$

$4z + z^3 = 5z^2 \Rightarrow z^3 - 5z^2 + 4z = 0 \Rightarrow z(z^2 - 5z + 4) = 0;$

1) $z = 0$ не подходит;

2) $z^2 - 5z + 4 = 0 \Rightarrow z_1 = 1$ и $z_2 = 4.$

$2^x = 1 \Rightarrow x = 0;$

$2^x = 4 \Rightarrow x = 2.$

Ответ: 0; 2.

19. $2^{2x+1} - 5 \cdot 6^x + 3^{2x+1} = 0.$

$2 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x \cdot 3^x + 3 \cdot 3^{2x} = 0 \mid\ : 3^{2x};$

$2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 3 = 0;\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = y > 0;$

$2y^2 - 5y + 3 = 0 \Rightarrow y_{1,\,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{4} \Rightarrow y_1 = 1$ и $y_2 = \dfrac{3}{2}.$

$\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 \Rightarrow x = 0;$

$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \Rightarrow x = -1.$

Ответ: -1; 0.

20. $3 \cdot 4^x + (3x-10) \cdot 2^x + 3 - x = 0.$

$2^x = y > 0;$

$3y^2 + (3x-10)y + (3-x) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y_{1,\,2} = \frac{-3x+10 \pm \sqrt{9x^2 - 60x + 100 - 36 + 12x}}{6} \Rightarrow$$

$$\frac{-3x+10 \pm \sqrt{9x^2 - 48x + 64}}{6} \Rightarrow \frac{-3x+10 \pm (3x-8)}{6}.$$

$y_1 = \dfrac{-3x+10+3x-8}{6} = \dfrac{1}{3};$

$y_2 = \dfrac{-3x+10-3x+8}{6} = 3 - x.$

1) $2^x = \dfrac{1}{3} \Rightarrow x = \log_2 \dfrac{1}{3};$

2) $2^x = 3 - x;\ x < 3;$

Подбор $x = 1$, т. к. $2 = 2$.

Это единственный корень, т. к. при $x > 1$ $2^x > 2$, а $3 - x < 2$; при $x < 1$ $2^x < 2$, а $3 - x > 2$.

Ответ: 1; $\log_2 \dfrac{1}{3}$.

21. $(6-\sqrt{35})^x + (6+\sqrt{35})^x = 142.$

$(6-\sqrt{35})(6+\sqrt{35}) = 36 - 35 = 1 \Rightarrow 6 + \sqrt{35} = \dfrac{1}{6-\sqrt{35}} \Rightarrow$

$\Rightarrow (6-\sqrt{35})^x + \dfrac{1}{(6-\sqrt{35})^x} = 142;$

$(6-\sqrt{35})^x = z > 0;$

$z + \dfrac{1}{z} - 142 = 0 \Rightarrow z^2 - 142z + 1 = 0 \Rightarrow z_{1,\,2} = 71 \pm$
$\pm \sqrt{5041 - 1} = 71 \pm \sqrt{5040} = 71 \pm 12\sqrt{35}.$

1) $(6-\sqrt{35})^x = 71 - 12\sqrt{35} \Rightarrow (6-\sqrt{35})^x = 36 - 12\sqrt{35} + 35 = (6-\sqrt{35})^2 \Rightarrow x = 2$;

2) $(6-\sqrt{35})^x = 71 + 12\sqrt{35} = (6+\sqrt{35})^2 \Rightarrow (6+\sqrt{35})^{-x} = (6+\sqrt{35})^2 \Rightarrow x = -2$.

О т в е т: -2; 2.

22. $2^{3x} - \dfrac{8}{2^{3x}} - 6\left(2^x - \dfrac{1}{2^{x-1}}\right) = 1.$

$2^x = y > 0.$

$y^3 - \dfrac{8}{y^3} - 6\left(y - \dfrac{2}{y}\right) = 1;$

$\left(y - \dfrac{2}{y}\right)^3 = y^3 - 3y^2\dfrac{2}{y} + 3y\dfrac{4}{y^2} - \dfrac{8}{y^3} = y^3 - \dfrac{8}{y^3} - 6\left(y - \dfrac{2}{y}\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(y - \dfrac{2}{y}\right)^3 = 1 \Rightarrow y - \dfrac{2}{y} = 1 \Rightarrow y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow y_1 = -1$ и $y_2 = 2$.

$y = -1$ не подходит, т. к. $y > 0$.

$2^x = 2 \Rightarrow x = 1.$

О т в е т: 1.

23. $|x-3|^{\frac{x^2-8x+15}{x-2}} = 1.$

1) $|x-3| = 1$; $x \neq 2 \Rightarrow x = 4$;

2) $x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$;

$(x-3)^{\frac{x^2-8x+15}{x-2}} = (x-3)^0 \Rightarrow \dfrac{x^2-8x+15}{x-2} = 0;$

$x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow x_1 = 3$ и $x_2 = 5$;

$x = 3$ не подходит, т. к. $x - 3 \neq 0$.

3) $x - 3 < 0 \Rightarrow x < 3$;

$(3-x)^{\frac{x^2-8x+15}{x-2}} = (3-x)^0$; $x \neq 2$;

$x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow x_1 = 3$ и $x_2 = 5$.

Оба корня не подходят.

О т в е т: 4; 5.

24. $2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 3.$

$2^{\sin^2 x} + 2^{1-\sin^2 x} = 3 \Rightarrow 2^{\sin^2 x} + 2 \cdot \dfrac{1}{2^{\sin^2 x}} - 3 = 0.$

$2^{\sin^2 x} = y > 0;$

$y + \dfrac{2}{y} - 3 = 0 \Rightarrow y^2 - 3y + 2 = 0 \Rightarrow y_1 = 1$ и $y_2 = 2$.

1) $2^{\sin^2 x} = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = \pi n,\ n \in Z.$

2) $2^{\sin^2 x} = 2 \Rightarrow \sin^2 x = 1 \Rightarrow \sin x = \pm 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z.$

Ответ: $\pi n;\ \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k,\ n \in Z.$

25. $4^{\operatorname{tg}^2 x} + 2^{\frac{1}{\cos^2 x}} = 8.$

$4^{\operatorname{tg}^2 x} + 2^{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}} = 8 \Rightarrow 4^{\operatorname{tg}^2 x} + 2 \cdot 2^{\operatorname{tg}^2 x} - 8 = 0;$
$2^{\operatorname{tg}^2 x} = y > 0;$
$y^2 + 2y - 8 = 0 \Rightarrow y_1 = -4$ и $y_2 = 2.$
$y = -4$ не подходит.
$2^{\operatorname{tg}^2 x} = 2 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} x = \pm 1 \Rightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$

Ответ: $\pm\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$

26. $4^{\sin x} - 3 \cdot 2^{\sin x + \cos x} + 2 \cdot 4^{\cos x} = 0.$

$2^{2\sin x} - 3 \cdot 2^{\sin x} \cdot 2^{\cos x} + 2 \cdot 2^{2\cos x} = 0 \mid\ : 2^{2\cos x};$
$2^{2(\sin x - \cos x)} - 3 \cdot 2^{\sin x - \cos x} + 2 = 0;$
$2^{\sin x - \cos x} = y > 0;$
$y^2 - 3y + 2 = 0 \Rightarrow y_1 = 1$ и $y_2 = 2;$

1) $2^{\sin x - \cos x} = 1 \Rightarrow \sin x - \cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n,$ $n \in Z;$

2) $2^{\sin x - \cos x} = 2 \Rightarrow \sin x - \cos x = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}} \sin x - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cos x =$
$= \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin x \cos\dfrac{\pi}{4} - \cos x \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$
$\Rightarrow x - \dfrac{\pi}{4} = (-1)^k \dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + (-1)^k \dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z.$

$k = 2m \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in Z;$
$k = 2l + 1 \Rightarrow x = (2l + 1)\pi = \pi + 2\pi l,\ l \in Z.$

Ответ: $\dfrac{\pi}{4} + \pi n;\ \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m;\ \pi + 2\pi l,\ n,\ m,\ l \in Z.$

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

1. $5\log_{\sqrt{5}} x - \log_5 x = 18;\ x > 0.$

$5\dfrac{\log_5 x}{\log_5 \sqrt{5}} - \log_5 x = 18 \Rightarrow 9\log_5 x = 18 \Rightarrow \log_5 x = 2 \Rightarrow x = 25.$

Ответ: 25.

2. $\log_3(x^2 - 6) = \log_3(x - 2) + 1.$

$$\begin{cases} x^2 - 6 > 0, \\ x - 2 > 0, \\ \log_3(x^2 - 6) = \log_3(x - 2) + \log_3 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 6, \\ x > 2, \\ x^2 - 6 = 3x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \sqrt{6}\,, \\ x^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \sqrt{6}\,, \\ x = 0 \text{ и } x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$

Ответ: 3.

3. $2\lg\left(x + \frac{1}{2}\right) - \lg(x-1) = \lg\left(x + \frac{5}{2}\right) + \lg 2;\ x > 1.$

$\dfrac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{x-1} = \left(x + \frac{5}{2}\right)\cdot 2;$

$x^2 + x + \frac{1}{4} = (x-1)(2x+5) \Leftrightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} = 2x^2 + 3x - 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - \frac{21}{4} = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 8x - 21 = 0;$

$x_{1,\,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16+84}}{4} \Leftrightarrow x_{1,\,2} = \dfrac{-4 \pm 10}{4} \Leftrightarrow x_1 = -\dfrac{14}{4}$ не подходит;

$x_2 = \frac{3}{2} > 1.$

Ответ: $\frac{3}{2}$.

4. $3\log_8(x-2) = \log_2\sqrt{2x-1}\,.$

$\begin{cases} x - 2 > 0, \\ 2x - 1 > 0, \\ 3\dfrac{\log_2(x-2)}{\log_2 8} = \log_2\sqrt{2x-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2, \\ x - 2 = \sqrt{2x-1} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 2, \\ x^2 - 4x + 4 = 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2, \\ x^2 - 6x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 2, \\ x_1 = 1;\ x_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5.$

Ответ: 5.

5. $\log_2(2^x - 7) = 3 - x;\ 2^x > 7.$

$2^x - 7 = 2^{3-x} \Rightarrow 2^x - 7 = \frac{8}{2^x};\ 2^x = y > 0.$

$y - 7 - \frac{8}{y} = 0 \Rightarrow y^2 - 7y - 8 = 0 \Rightarrow y_1 = -1$ и $y_2 = 8.$

$y = -1$ не подходит, т. к. $y > 0.$

$2^x = 8 \Rightarrow x = 3.$

Ответ: 3.

6. $x^2\log_6\sqrt{5x^2 - 2x - 3} - x\log_{\frac{1}{6}}(5x^2 - 2x - 3) = x^2 + 2x.$

$\begin{cases} 5x^2 - 2x - 3 > 0, \\ x^2\log_6\sqrt{5x^2-2x-3} + 2x\log_6\sqrt{5x^2-2x-3} = x^2 + 2x \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2-2x-3>0,\ x_{1,\,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+15}}{5}=\dfrac{1\pm 4}{5} \\ (x^2+2x)(\log_6\sqrt{5x^2-2x-3}-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5(x-1)\left(x+\dfrac{3}{5}\right)>0, \\ x(x+2)\log_6\dfrac{\sqrt{5x^2-2x-3}}{6}=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x<-\dfrac{3}{5} \text{ или } x>1, \\ x_1=0;\ x_2=-2;\ \sqrt{5x^2-2x-3}=6 \end{cases}$$

1) $x=0$ не подходит;

2) $x=-2$ подходит.

3) $5x^2-2x-3=36 \Leftrightarrow 5x^2-2x-39=0$;

$x_{1,\,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+195}}{5}=\dfrac{1\pm 14}{5} \Leftrightarrow x_1=-\dfrac{13}{5};\ x_2=3.$

Ответ: $-\dfrac{13}{5}$; -2; 3.

7. $\log_3(2x+1)=2\log_{2x+1}3+1$.

$$\begin{cases} x>-\dfrac{1}{2}, \\ x\neq 0, \\ \log_3(2x+1)=\dfrac{2}{\log_3(2x+1)}+1; \\ \log_3(2x+1)=y. \end{cases}$$

$y=\dfrac{2}{y}+1 \Rightarrow y^2-y-2=0 \Rightarrow y_1=-1$ и $y_2=2$.

1) $\log_3(2x+1)=-1 \Rightarrow 2x+1=\dfrac{1}{3} \Rightarrow x=-\dfrac{1}{3}$;

2) $\log_3(2x+1)=2 \Rightarrow 2x+1=9 \Rightarrow x=4$.

Ответ: $-\dfrac{1}{3}$; 4.

8. $\log_x(2x^2-3x-4)=2$.

$$\begin{cases} 2x^2-3x-4>0, \\ x>0, \\ x\neq 1, \\ 2x^2-3x-4=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-3x-4>0, \\ x>0, \\ x\neq 1, \\ x^2-3x-4=0. \end{cases}$$

$x=-1$ не подходит;

$x=4$; проверка $2\cdot 16-12-4>0$.

Ответ: 4.

9. $\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}=(2x-1)^{\log_{\frac{1}{4}}(1+7x-2x^2)}$.

$$\begin{cases} 2x-1>0, \\ 1+7x-2x^2>0, \\ (2x-1)^{-\frac{1}{2}}=(2x-1)^{\log_{\frac{1}{4}}(1+7x-2x^2)} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$1)\ \begin{cases} x>\dfrac{1}{2}, \\ 2x^2-7x-1<0, \\ 2x-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

$$2)\ \begin{cases} x>\dfrac{1}{2}, \\ 2x^2-7x-1<0, \\ -\dfrac{1}{2}=\log_{\frac{1}{4}}(1+7x-2x^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{1}{2}, \\ 2x^2-7x-1<0, \\ 1+7x-2x^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-7x+1=0, \\ x>\dfrac{1}{2}, \\ 2x^2-7x-1<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{1,\,2}=\dfrac{7\pm\sqrt{49-8}}{4}, \\ x>\dfrac{1}{2}, \\ 2x^2-7x-1<0. \end{cases}$$

1) $x_1=\dfrac{7-\sqrt{41}}{4}$; $\dfrac{7-\sqrt{41}}{4}>\dfrac{1}{2}? \Rightarrow 7-\sqrt{41}>2? \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{41}<5 \Rightarrow 41<25$ неверно $\Rightarrow x=\dfrac{7-\sqrt{41}}{4}$ не подходит.

2) $x_2=\dfrac{7+\sqrt{41}}{4}$.

$\dfrac{7+\sqrt{41}}{4}>\dfrac{1}{2}? \Rightarrow 7+\sqrt{41}>2 \Rightarrow \sqrt{41}>-5$ верно.

$2x^2-7x-1<0?$

$2x^2-7x+1=0;$

$2x^2-7x-1=2x^2-7x+1-2=-2<0.$

О т в е т: $1;\ \dfrac{7+\sqrt{41}}{4}$.

10. $2\lg^2 x+\lg x^2=2\sqrt{2}+\sqrt{2}\lg x^2$.

$x>0;$

$2\lg^2 x+2\lg x-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}\lg x=0;$

$\lg x=y.$

$\cancel{2}y^2+\cancel{2}(1-\sqrt{2})y-\cancel{2}\sqrt{2}=0;$

$$y_{1,\,2}=\frac{\sqrt{2}-1\pm\sqrt{2-2\sqrt{2}+1+4\sqrt{2}}}{2}=\frac{(\sqrt{2}-1)\pm(\sqrt{2}+1)}{2}\Rightarrow$$

$\Rightarrow y_1=-1$ и $y_2=\sqrt{2}$.

1) $\lg x = -1 \Rightarrow x = 0{,}1$;
2) $\lg x = \sqrt{2} \Rightarrow x = 10^{\sqrt{2}}$.
Ответ: $0{,}1$; $10^{\sqrt{2}}$.

11. $\log_3 \frac{3}{x} \log_2 x - \log_3 \frac{x^3}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + \log_2 \sqrt{x}$.

$x > 0$;

$(1 - \log_3 x)\log_2 x - 3\log_3 x + \cancel{\frac{1}{2}} = \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\log_2 x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\log_3 x \log_2 x - 3\log_3 x + \frac{1}{2}\log_2 x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_3 x \log_2 x + 3\log_3 x - \frac{1}{2}\log_2 x = 0$.

1) $x = 1$;

2) $x \neq 1$, делим уравнение на $\log_2 x \neq 0$, т. к. $x \neq 1$.

$\log_3 x + 3\frac{\log_3 x}{\log_2 x} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \log_3 x + 3\frac{\log_x 2}{\log_x 3} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \log_3 x +$
$+ 3\log_3 2 - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \log_3 8x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 8x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{8}$.

Ответ: 1; $\frac{\sqrt{3}}{8}$.

12. $\log_{x+1} 2 = 2$;

$$\begin{cases} x + 1 > 0, \\ x + 1 \neq 1, \\ (x+1)^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1, \\ x \neq 0, \\ x^2 + 2x - 1 = 0. \end{cases}$$

$x_{1,\,2} = -1 \pm \sqrt{1+1} = -1 \pm \sqrt{2}$.
$x = -1 - \sqrt{2}$ не подходит, т. к. $x > -1$.
Ответ: $\sqrt{2} - 1$.

13. $\log_{3x+7}(9 + 2x + 4x^2) + \log_{2x+3}(6x^2 + 23x + 21) = 4$.
$\log_{3x+7}(2x+3)^2 + \log_{2x+3}(3x+7)(2x+3) = 4$.

$$\begin{cases} 3x + 7 > 0, \\ 2x + 3 > 0, \\ 3x + 7 \neq 1, \\ 2x + 3 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{7}{3}, \\ x > -\frac{3}{2}, \\ x \neq -2, \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{3}{2}, \\ x \neq -1. \end{cases}$$

$2\log_{3x+7}(2x+3) + \log_{2x+3}(3x+7) - 3 = 0$.

$\log_{3x+7}(2x+3) = y$;

$2y + \frac{1}{y} - 3 = 0 \Leftrightarrow 2y^2 - 3y + 1 = 0$;

$y_{1,\,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} \Leftrightarrow y_1 = \dfrac{1}{2}$ и $y_2 = 1$.

1) $\log_{3x+7}(2x+3) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{3x+7} = 2x+3 \Leftrightarrow 3x+7 = 4x^2 + {}$ $+ 12x + 9 \Leftrightarrow 4x^2 + 9x + 2 = 0$;

$x_{1,\,2} = \dfrac{-9 \pm \sqrt{81-32}}{8} = \dfrac{-9 \pm 7}{8}$,

$x_1 = -2$ не подходит; $x_2 = -\dfrac{1}{4}$.

2) $\log_{3x+7}(2x+3) = 1 \Leftrightarrow 3x+7 = 2x+3 \Leftrightarrow x = -4$ не подходит.

Ответ: $-\dfrac{1}{4}$.

14. $\lg(10x)\lg(0{,}1x) = \lg x^3 - 3$; $x > 0$.

$(1 + \lg x)(\lg x - 1) = 3\lg x - 3$; $\lg x = y$.

$y^2 - 1 - 3y + 3 = 0 \Rightarrow y^2 - 3y + 2 = 0 \Rightarrow y_1 = 1$ и $y_2 = 2$.

1) $\lg x = 1 \Rightarrow x = 10$;

2) $\lg x = 2 \Rightarrow x = 100$.

Ответ: 10; 100.

15. $\log_{x^2-4x+1}(x^3 - 3x^2 - 3x + 1) = 2$.

Применим метод проверки корней.

$\log_{x^2-4x+1}(x^3 + 1 - 3x(x+1)) = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{x^2-4x+1}((x+1)(x^2-4x+1)) = 2$;

$\log_{x^2-4x+1}(x+1) + 1 = 2 \Leftrightarrow \log_{x^2-4x+1}(x+1) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ и $x_2 = 5$.

1) $x = 0$ не подходит, т. к. основание логарифма $x^2 - 4x + 1 \neq 1$;

2) проверяем корень $x = 5$; $5^2 - 4 \cdot 5 + 1 = 6$; $5 + 1 = 6$.

Ответ: 5.

16. $2\log_2\left(\dfrac{x-7}{x-1}\right) + \log_2\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = 1$.

$$\begin{cases} \dfrac{x-7}{x-1} > 0, \\ \dfrac{x-1}{x+1} > 0; \end{cases}$$

$x > 7$ и $x < -1$.

$\log_2\left(\dfrac{x-7}{x-1}\right)^2 + \log_2\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = 1 \Leftrightarrow \log_2\left(\left(\dfrac{x-7}{x-1}\right)^2\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\right) =$ $= 1 \Leftrightarrow \dfrac{(x-7)^2}{(x-1)(x+1)} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 14x + 49 = 2x^2 - 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 14x - 51 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -17$; $x_2 = 3$.

$x = 3$ не подходит.

Ответ: -17.

17. $2x + 1 = 2\log_2(9^x + 3^{2x-1} - 2^{x+3,5})$.

$9^x + 3^{2x-1} - 2^{x+3,5} = 2^{x+0,5} \Leftrightarrow 3^{2x}\left(1 + \dfrac{1}{3}\right) = 2^x(2^{0,5} + 2^{3,5}) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3^{2x-1} \cdot 2^2 = 2^{x+0,5} \cdot 9 \Leftrightarrow 3^{2x-3} = 2^{x-1,5} \Leftrightarrow 9^{x-1,5} = 2^{x-1,5} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x - 1,5 = 0 \Leftrightarrow x = 1,5$.

Проверка: $3^3 + 3^{3-1} - 2^5 = 27 + 9 - 32 = 4 > 0$.

Ответ: 1,5.

18. $\log_{3x} x = \log_{9x} x$; $x > 0$; $x \neq \dfrac{1}{3}$; $x \neq \dfrac{1}{9}$.

1) $x = 1$; $\log_3 1 = \log_9 1 = 0$.

2) $x \neq 1$; $\dfrac{1}{\log_x 3x} = \dfrac{1}{\log_x 9x} \Leftrightarrow \log_x 3 + 1 = \log_x 9 + 1 \Leftrightarrow \log_2 9 -$
$- \log_x 3 = 0 \Leftrightarrow \log_x 3 = 0$ невозможно.

Ответ: 1.

19. $\log_3(3^x - 1)\log_3(3^{x+1} - 3) = 6$;

$3^x - 1 > 0 \Leftrightarrow 3^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$.

$\log_3(3^x - 1)\log_3(3(3^x - 1)) = 6 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \log_3(3^x - 1)(\log_3 3 + \log_3(3^x - 1)) = 6$;
$\log_3(3^x - 1) = y$;
$y(1 + y) - 6 = 0 \Rightarrow y^2 + y - 6 = 0 \Rightarrow y_1 = -3$; $y_2 = 2$.

1) $\log_3(3^x - 1) = -3 \Rightarrow 3^x - 1 = \dfrac{1}{27} \Rightarrow 3^x = \dfrac{28}{27} \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \log_3 \dfrac{28}{27} \Rightarrow x = \log_3 28 - 3$.

2) $\log_3(3^x - 1) = 2 \Rightarrow 3^x - 1 = 9 \Rightarrow 3^x = 10 \Rightarrow x = \log_3 10$.

Ответ: $\log_3 28 - 3$; $\log_3 10$.

20. $\log_2 x \log_2(x - 3) + 1 = \log_2(x^2 - 3x)$.

$\begin{cases} x > 0, \\ x - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3.$

$\log_2 x \log_2(x - 3) + 1 = \log_2 x + \log_2(x - 3) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \log_2 x(\log_2(x - 3) - 1) - (\log_2(x - 3) - 1) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\log_2(x - 3) - 1)(\log_2 x - 1) = 0$.
1) $\log_2(x - 3) = 1 \Rightarrow x - 3 = 2 \Rightarrow x = 5$;
2) $\log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2$ не подходит.

Ответ: 5.

21. $3\log_2^2 \sin x + \log_2(1 - \cos 2x) = 2$.

$3\log_2^2 \sin x + \log_2(2\sin^2 x) = 2$; $\sin x > 0$.

$3\log_2^2 \sin x + 1 + 2\log_2 \sin x - 2 = 0;$

$\log_2 \sin x = y;$

$3y^2 + 2y - 1 = 0 \Rightarrow y_{1,\,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+3}}{3} = \dfrac{-1 \pm 2}{3}.$

$y_1 = -1;\ y_2 = \dfrac{1}{3}.$

1) $\log_2 \sin x = -1 \Rightarrow \sin x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$

2) $\log_2 \sin x = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \sin x = \sqrt[3]{2}$ невозможно, т. к. $\sqrt[3]{2} > 1.$

О т в е т: $(-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$

22. $\log_3 x \log_9 x \log_{27} x \log_{81} x = \dfrac{2}{3}.\ x > 0;$

$\log_3 x \dfrac{\log_3 x}{\log_3 9} \dfrac{\log_3 x}{\log_3 27} \dfrac{\log_3 x}{\log_3 81} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow (\log_3 x)^4 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\log_3 x)^4 = 16 \Leftrightarrow \log_3 x = \pm 2.$

1) $\log_3 x = -2 \Rightarrow x = \dfrac{1}{9};$

2) $\log_3 x = 2 \Rightarrow x = 9.$

О т в е т: $\dfrac{1}{9}$; 9.

23. $2\lg x - \lg 4 = -\lg(5 - x^2).$

$$\begin{cases} x > 0, \\ 5 - x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x^2 < 5 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < \sqrt{5}.$$

$\lg^2 x - \lg 4 + \lg(5 - x^2) = 0 \Rightarrow \lg \dfrac{x^2(5 - x^2)}{4} = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 5x^2 - x^4 = 4 \Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 = 1;\ x_2^2 = 4.$

1) $x = -1$ не подходит; $x = 1;$

2) $x = -2$ не подходит; $x = 2.$

О т в е т: 1; 2.

24. $2^{\log_3 x^2} \cdot 5^{\log_3 x} = 400;\ x > 0.$

$4^{\log_3 x} \cdot 5^{\log_3 x} = 400 \Leftrightarrow 20^{\log_3 x} = 20^2 \Leftrightarrow \log_3 x = 2 \Leftrightarrow x = 9.$

О т в е т: 9.

25. $\log_5 x + \log_x 25 = \operatorname{ctg}^2 \dfrac{25\pi}{6}.\ x > 0;\ x \neq 1.$

$\log_5 x + 2\log_x 5 = \operatorname{ctg}^2 \left(4\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \log_5 x + 2\log_x 5 = 3;$
$\log_5 x = y.$

$y + \dfrac{2}{y} - 3 = 0 \Rightarrow y^2 - 3y + 2 = 0 \Rightarrow y_1 = 1;\ y_2 = 2.$

1) $\log_5 x = 1 \Rightarrow x = 5;$

2) $\log_5 x = 2 \Rightarrow x = 25$.

Ответ: 5; 25.

26. $x^{\lg x} = 1000x^2$; $x > 0$.

$\lg x \lg x = \lg 1000 + 2\lg x \Leftrightarrow \lg^2 x - 2\lg x - 3 = 0$; $\lg x = y$;
$y^2 - 2y - 3 = 0 \Rightarrow y_1 = -1$; $y_2 = 3$.
1) $\lg x = -1 \Rightarrow x = 0{,}1$;
2) $\lg x = 3 \Rightarrow x = 1000$.

Ответ: 0,1; 1000.

27. $27^{\lg x} - 7\cdot 9^{\lg x} - 21\cdot 3^{\lg x} + 27 = 0$; $x > 0$.

$(3^{\lg x})^3 - 7(3^{\lg x})^2 - 21\cdot 3^{\lg x} + 27 = 0$; $3^{\lg x} = y$;
$y^3 - 7y^2 - 21y + 27 = 0 \Leftrightarrow y^3 + 27 - 7y(y+3) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (y+3)(y^2 - 3y + 9) - 7y(y+3) = 0 \Leftrightarrow (y+3)(y^2 - 10y + 9) = 0$;
1) $y + 3 = 0 \Rightarrow y = -3$;
2) $y^2 - 10y + 9 = 0 \Rightarrow y_1 = 1$; $y_2 = 9$.
$y > 0 \Rightarrow y = -3$ не подходит.
$3^{\lg x} = 1 \Rightarrow \lg x = 0 \Rightarrow x = 1$;
$3^{\lg x} = 9 \Rightarrow \lg x = 2 \Rightarrow x = 100$.

Ответ: 1; 100.

28. $1 + 2\log_x 2 \log_4(10 - x) = \dfrac{2}{\log_4 x}$.

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ 10 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ x < 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1, \\ 0 < x < 10. \end{cases}$$

$1 + \dfrac{\log_4(10 - x)}{\log_4 x} - \dfrac{2}{\log_4 x} = 0$;

$\log_4 x((10 - x)x) = 2 \Leftrightarrow 10x - x^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 16 = 0$;
$x_1 = 2$; $x_2 = 8$.

Ответ: 2; 8.

29. $\log_2(25^{x+3} - 1) = 2 + \log_2(5^{x+3} + 1)$.

$25^{x+3} > 1 \Rightarrow x + 3 > 0 \Rightarrow x > -3$.

$\log_2 \dfrac{25^{x+3} - 1}{5^{x+3} + 1} = 2 \Leftrightarrow 25^{x+3} - 1 = 4(5^{x+3} + 1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (5^{x+3})^2 - 4\cdot 5^{x+3} - 5 = 0$; $5^{x+3} = y > 0$.
$y^2 - 4y - 5 = 0 \Leftrightarrow y_1 = -1$; $y_2 = 5$.
$y = -1$ не подходит.
$5^{x+3} = 5 \Leftrightarrow x + 3 = 1 \Leftrightarrow x = -2$.

Ответ: -2.

30. $x^{\log_2 x+2} = 256$; $x > 0$.

$(\log_2 x + 2)\log_2 x = \log_2 256 \Leftrightarrow \log_2^2 x + 2\log_2 x - 8 = 0$;

$\log_2 x = y$; $y^2 + 2y - 8 = 0 \Rightarrow y_1 = -4$; $y_2 = 2$.

$\log_2 x = -4 \Rightarrow x = \dfrac{1}{16}$;

$\log_2 x = 2 \Rightarrow x = 4$.

Ответ: $\dfrac{1}{16}$; 4.

31. $\log_3\left(3^{x^2-13x+28} + \dfrac{2}{9}\right) = \log_5 0{,}2$;

$\log_3\left(3^{x^2-13x+28} + \dfrac{2}{9}\right) = -1$;

$3^{x^2-13x+28} + \dfrac{2}{9} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow 3^{x^2-13x+28} = 3^{-2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 13x + 30 = 0 \Rightarrow x_1 = 3$; $x_2 = 10$.

Ответ: 3; 10.

32. $\log_2(9 - 2^x) = 10^{\lg(3-x)}$.

$\begin{cases} 3 - x > 0, \\ 9 - 2^x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ 2^x < 9 \end{cases} \Leftrightarrow x < 3.$

$\log_2(9 - 2^x) = 3 - x \Leftrightarrow 9 - 2^x = 8 \cdot 2^{-x}$; $2^x = y > 0$;

$9 - y = \dfrac{8}{y} \Rightarrow y^2 - 9y + 8 = 0 \Rightarrow y_1 = 1$; $y_2 = 8$.

$2^x = 1 \Rightarrow x = 0$;

$2^x = 8 \Rightarrow x = 3$ не подходит; т. к. $x < 3$.

Ответ: 0.

33. $\dfrac{1}{3}\lg(271 + 3^{2\sqrt{x}}) + \lg 10 = 2$. $x \geqslant 0$.

$\dfrac{1}{3}\lg(271 + 3^{2\sqrt{x}}) = 1 \Leftrightarrow \lg(271 + 3^{2\sqrt{x}}) = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 271 + 3^{2\sqrt{x}} = 1000 \Leftrightarrow 3^{2\sqrt{x}} = 729 \Leftrightarrow 3^{2\sqrt{x}} = 3^6$.

$\sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9$.

Ответ: 9.

34. $3\lg(x^2) - \lg^2(-x) = 9$; $x < 0$.

$\lg^2(-x) - 6\lg(-x) + 9 = 0$; $\lg(-x) = y$.

$y^2 - 6y + 9 = 0 \Rightarrow (y - 3)^2 = 0 \Rightarrow y = 3$.

$\lg(-x) = 3 \Rightarrow -x = 1000 \Rightarrow x = -1000$.

Ответ: -1000.

35. $x^2 \log_x 27 \log_9 x = x + 4$; $x > 0$; $x \neq 1$.

$\dfrac{x^2 \log_9 x}{\log_{27} x} = x + 4 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 \cancel{\log_3 x} \log_3 27}{\log_3 9 \cancel{\log_3 x}} = x + 4 \Leftrightarrow \dfrac{3x^2}{2} = x + 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x^2 - 2x - 8 = 0.$

$x_{1,\,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+24}}{3} = \dfrac{1 \pm 5}{3} \Rightarrow x_1 = -\dfrac{4}{3};\ x_2 = 2.$

$x = -\dfrac{4}{3}$ не подходит, т. к. $x > 0$.

Ответ: 2.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

1. $\cos^4 x - \sin^4 x = 0 \Leftrightarrow (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0;\ 2x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2},\ n \in Z.$

Ответ: $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2},\ n \in Z.$

2. $\sqrt{3}\,\sin x = \cos x.$

$\cos x \neq 0$, т. к. если $\cos x = 0$, то и $\sin x = 0$, что невозможно; делим уравнение на $\cos x$.

$\sqrt{3}\,\operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$

Ответ: $\dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$

3. $2\sin^2 x - \sqrt{3}\,\sin 2x = 0.$

$2\sin^2 x - 2\sqrt{3}\,\sin x \cos x = 0 \Rightarrow \sin x(\sin x - \sqrt{3}\,\cos x) = 0.$

1) $\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi n,\ n \in Z.$
2) $\sin x - \sqrt{3}\,\cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z.$

Ответ: $\pi n;\ \dfrac{\pi}{3} + \pi k,\ n,\ k \in Z.$

4. $\operatorname{tg} 2x - \operatorname{ctg} 3x = 0;\ \cos 2x \neq 0;\ \sin 3x \neq 0.$

$\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x} - \dfrac{\cos 3x}{\sin 3x} = 0 \Rightarrow \dfrac{\sin 2x \sin 3x - \cos 2x \cos 3x}{\cos 2x \sin 3x} = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \cos 5x = 0 \Rightarrow 5x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{\pi n}{5},\ n \in Z.$

$2x = \dfrac{\pi}{5} + \dfrac{2\pi n}{5},\ n \in Z;\ \cos 2x \neq 0;$

$3x = \dfrac{3\pi}{10} + \dfrac{3\pi n}{5},\ n \in Z;\ \sin 3x \neq 0.$

Ответ: $\dfrac{\pi}{10} + \dfrac{\pi n}{5},\ n \in Z.$

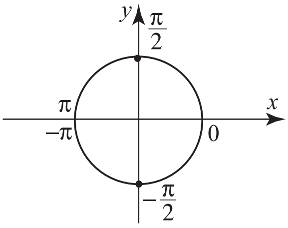
5. $\cos 2x - 2\sin^2 x = -3.$

$1 - 2\sin^2 x - 2\sin^2 x = -3 \Leftrightarrow -4\sin^2 x =$
$= -4 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \pm 1.$

$\sin x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$

$\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z.$

Отметим решения на окружности.



О т в е т: $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z.$

6. $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}\sin 3x \mid\ : \sqrt{2}.$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x = \sin 3x \Rightarrow \sin 2x \cos\frac{\pi}{4} + \cos 2x \sin\frac{\pi}{4} =$$
$$= \sin 3x \Rightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin 3x = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\sin\frac{2x + \frac{\pi}{4} - 3x}{2}\cos\frac{2x + \frac{\pi}{4} + 3x}{2} = 0$$

1) $\sin\left(-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0 \Rightarrow -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} = \pi n,\ n \in Z \Rightarrow$
$\Rightarrow -\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{8} + \pi n,\ n \in Z \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z.$

2) $\cos\left(\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0 \Rightarrow \frac{5x}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{5x}{2} = \frac{3\pi}{8} + \pi k,\ k \in Z \Rightarrow x = \frac{3\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5},\ k \in Z.$

О т в е т: $\frac{\pi}{4} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5},\ n,\ k \in Z.$

7. $\cos^2 x - 3\cos x \sin x + 1 = 0.$

$2\cos^2 x - 3\cos x \sin x + \sin^2 x = 0 \mid\ : \cos^2 x \neq 0.$

$\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 2 = 0;\ \operatorname{tg} x = y.$

$y^2 - 3y + 2 = 0 \Rightarrow y_1 = 1;\ y_2 = 2.$

$\operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$

$\operatorname{tg} x = 2 \Rightarrow x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k,\ k \in Z.$

О т в е т: $\frac{\pi}{4} + \pi n;\ \operatorname{arctg} 2 + \pi k,\ n,\ k \in Z.$

8. $\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = 1 + \sin 2x;\ \cos x \neq 0,\ \operatorname{tg} x \neq 1.$

$$\frac{1 + \frac{\sin x}{\cos x}}{1 - \frac{\sin x}{\cos x}} = \cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x \cos x \Rightarrow \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} =$$
$$= (\cos x + \sin x)^2 \Rightarrow (\cos x + \sin x) - (\cos x + \sin x)^2 \times$$
$$\times (\cos x - \sin x) = 0 \Rightarrow (\cos x + \sin x)(1 - \cos^2 x + \sin^2 x) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\cos x + \sin x) \cdot 2\sin^2 x = 0.$$

1) $\cos x + \sin x = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = -1 \Rightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$

2) $\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k,\ k \in Z.$

Ответ: $-\dfrac{\pi}{4} + \pi n;\ \pi k,\ n,\ k \in Z.$

9. $4 \sin x \sin 2x \sin 3x = \sin 4x.$

$4 \sin x \sin 3x \sin 2x - 2 \sin 2x \cos 2x = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2 \sin 2x(2 \sin x \sin 3x - \cos 2x) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \sin 2x(\cancel{\cos 2x} - \cos 4x - \cancel{\cos 2x}) = 0 \Rightarrow \sin 2x \cos 4x = 0.$

1) $\sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = \pi n,\ n \in Z \Rightarrow x = \dfrac{\pi n}{2},\ n \in Z.$

2) $\cos 4x = 0 \Rightarrow 4x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi k}{4},\ k \in Z.$

Ответ: $\dfrac{\pi n}{2};\ \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi k}{4},\ n,\ k \in Z.$

10. $\sin x(1 + \cos x) = 1 + \cos x + \cos^2 x.$

$1 + \cos x \neq 0$, т. к. при $\cos x = -1$; получаем $0 \neq 1$.

Делим обе части уравнения на $1 + \cos x$.

$\sin x = 1 + \dfrac{\cos^2 x}{1 + \cos x};\ \dfrac{\cos^2 x}{1 + \cos x} \geqslant 0$, т. к. $\cos^2 x \geqslant 0$ и $1 + \cos x > 0$.

$1 + \dfrac{\cos^2 x}{1 + \cos x} \geqslant 1$, но $\sin x \leqslant 1 \Rightarrow \sin x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,$ $n \in Z.$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$

11. $\sin x = \sqrt{5} \cos \dfrac{x}{2}.$

$2 \sin \dfrac{x}{2} \cos \dfrac{x}{2} - \sqrt{5} \cos \dfrac{x}{2} = 0 \Rightarrow \cos \dfrac{x}{2} \left(2 \sin \dfrac{x}{2} - \sqrt{5}\right) = 0.$

1) $\cos \dfrac{x}{2} = 0 \Rightarrow \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z \Rightarrow x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z.$

2) $\sin \dfrac{x}{2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ не имеет решений, т. к. $\sin \dfrac{x}{2} \leqslant 1.$

Ответ: $\pi + 2\pi n,\ n \in Z.$

12. $\sqrt{3} \sin x = 2 \operatorname{ctg} x;\ \sin x \neq 0.$

$\sqrt{3} \sin x = \dfrac{2 \cos x}{\sin x} \Rightarrow \sqrt{3} \sin^2 x = 2 \cos x \Rightarrow \sqrt{3} - \sqrt{3} \cos^2 x -$ $- 2 \cos x = 0 \Rightarrow \sqrt{3} \cos^2 x + 2 \cos x - \sqrt{3} = 0.$

$\cos x = y;\ |y| \leqslant 1.$

$\sqrt{3}\, y^2 + 2y - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow y_{1,\,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{-1 \pm 2}{\sqrt{3}}.$

$y_1 = -\sqrt{3};\ y_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}.$

$y = -\sqrt{3}$ не подходит, т. к. $y \geqslant -1.$

$\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \pm \arccos \dfrac{1}{\sqrt{3}} + 2\pi n,\ n \in Z.$

Ответ: $\pm \arccos \dfrac{1}{\sqrt{3}} + 2\pi n,\ n \in Z.$

13. $4 \sin 2x + \sqrt{2} \cos 4x = 0.$

$4 \sin 2x + \sqrt{2}\,(1 - 2\sin^2 2x) = 0 \Rightarrow 4 \sin 2x + \sqrt{2} -$
$- 2\sqrt{2} \sin^2 2x = 0 \Rightarrow 2\sqrt{2} \sin^2 2x - 4 \sin 2x - \sqrt{2} = 0;$

$\sin 2x = y.$

$2\sqrt{2}\, y^2 - 4y - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow y_{1,\,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}};$

$y_1 = \dfrac{2 - 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} - 1 > -1.$

$y_2 = \dfrac{2 + 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + 1 > 1$ не подходит, т. к. $y \leqslant 1.$

$\sin 2x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} - 1 \Rightarrow 2x = (-1)^n \arcsin \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) + \pi n,$
$n \in Z \Rightarrow x = (-1)^n \dfrac{1}{2} \arcsin \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) + \dfrac{\pi n}{2},\ n \in Z.$

Ответ: $(-1)^n \dfrac{1}{2} \arcsin \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) + \dfrac{\pi n}{2},\ n \in Z.$

14. $\dfrac{\sin 2x}{1 - \cos x} = 2 \sin x,\ \cos x \neq 1.$

$2 \sin x \cos x - 2 \sin x(1 - \cos x) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \sin x(\cos x - 1 + \cos x) = 0 \Rightarrow \sin x(2\cos x - 1) = 0.$

1) $\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi n,\ n \in Z.$

2) $\cos x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z.$

Ответ: $\pi n,\ \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ n,\ k \in Z.$

15. $\sin \left(\dfrac{4}{3} \pi \sin x\right) = \dfrac{1}{2}.$

$\dfrac{4}{3}\pi \sin x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ \ n \in Z \Rightarrow \dfrac{4}{3} \sin x = (-1)^n \dfrac{1}{6} + n,$
$n \in Z \Rightarrow \sin x = (-1)^n \dfrac{1}{8} + \dfrac{3n}{4},\ n \in Z.$

$|\sin x| \leqslant 1.$

1) $n = 0;\ \sin x = \dfrac{1}{8} \Rightarrow x = (-1)^k \arcsin \dfrac{1}{8} + \pi k,\ k \in Z.$

2) $n = 1;\ \sin x = -\dfrac{1}{8} + \dfrac{3}{4} = \dfrac{5}{8} \Rightarrow x = (-1)^m \arcsin \dfrac{5}{8} + \pi m,$
$m \in Z.$

3) $n=-1$; $\sin x = -\frac{1}{8} - \frac{3}{4} = -\frac{7}{8} \Rightarrow x = (-1)^{l+1}\arcsin\frac{7}{8} + \pi l$, $l \in Z$.

4) $n=2$; $\sin x = \frac{1}{8} + \frac{6}{7} = \frac{13}{8}$ не годится, т. к. $\sin x \leqslant 1$.

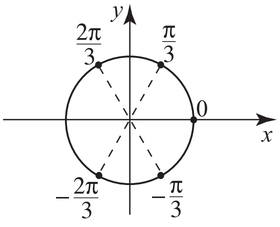
5) $n=-2$; $\sin x = \frac{1}{8} - \frac{6}{4} = -\frac{11}{8}$ не годится, т. к. $\sin x \geqslant -1$.

Ответ: $(-1)^k\arcsin\frac{1}{8} + \pi k$; $(-1)^m\arcsin\frac{5}{8} + \pi m$; $(-1)^{l+1}\arcsin\frac{7}{8} + \pi l$, $k, m, l \in Z$.

16. $2\,\mathrm{tg}^2 x + 4\cos^2 x = 7$; $\cos x \neq 0$.

$2\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 4\cos^2 x = 7 \Rightarrow 2(1-\cos^2 x) + 4\cos^4 x - 7\cos^2 x = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4\cos^4 x - 9\cos^2 x + 2 = 0$, $\cos^2 x = y$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

$4y^2 - 9y + 2 = 0 \Rightarrow y_{1,\,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-32}}{8} = \frac{9 \pm 7}{8}$.



$y_1 = \frac{1}{4}$, $y_2 = 2$, не подходит.

$\cos^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{1}{2}$.

$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Отметим эти решения на окружности.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$.

17. $2\sin^2 x = 1 + \sqrt{3} + \cos 2x$.

$2\sin^2 x = 1 + \sqrt{3} + 1 - 2\sin^2 x \Rightarrow 4\sin^2 x = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2(1 - \cos 2x) = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow -2\cos 2x = \sqrt{3} \Rightarrow \cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z \Rightarrow x = \pm\frac{5\pi}{12} + \pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $\pm\frac{5\pi}{12} + \pi n$, $n \in Z$.

18. $\cos 2x = 2\,\mathrm{tg}^2 x - \cos^2 x$, $\cos x \neq 0$.

$2\cos^2 x - 1 = \frac{2\sin^2 x}{\cos^2 x} - \cos^2 x \Rightarrow 3\cos^4 x - \cos^2 x =$
$= 2 - 2\cos^2 x \Rightarrow 3\cos^4 x + \cos^2 x - 2 = 0$; $\cos^2 x = y$, $0 < y \leqslant 1$.

$3y^2 + y - 2 = 0 \Rightarrow y_{1,\,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{6} = \frac{-1 \pm 5}{6}$.

$y_1 = -1$; $y_2 = \frac{2}{3}$.

$y=-1$ не подходит, т. к. $y>0$.

$\cos^2 x=\dfrac{2}{3}\Rightarrow 1+\cos 2x=\dfrac{4}{3}\Rightarrow \cos 2x=\dfrac{1}{3}$.

$2x=\pm\arccos\dfrac{1}{3}+2\pi n,\ n\in Z$;

$x=\pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1}{3}+\pi n,\ n\in Z$.

Ответ: $\pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1}{3}+\pi n,\ n\in Z$.

19. $\sin^2\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2x+2=4\sin\left(x-\dfrac{7\pi}{2}\right)$.

$\dfrac{1-\cos x}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2x+2=-4\sin\left(2\pi+\dfrac{3\pi}{2}-x\right)\Leftrightarrow\dfrac{5}{2}+$
$+\dfrac{1}{2}(\cos 2x-\cos x)=4\cos x\Leftrightarrow 5+2\cos^2 x-1-\cos x-8\cos x=0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2\cos^2 x-9\cos x+4=0;\ \cos x=y;\ |y|\leqslant 1$.

$2y^2-9y+4=0\Leftrightarrow y_{1,\,2}=\dfrac{9\pm\sqrt{81-32}}{4}=\dfrac{9\pm 7}{4}$.

$y_1=\dfrac{1}{2}$; $y_2=4$ не подходит, т. к. $y\leqslant 1$.

$\cos x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$.

Ответ: $\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$.

20. $\dfrac{1-\cos x}{\cos\dfrac{\pi+x}{2}}=2$.

$\dfrac{1-\cos x}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{x}{2}\right)}=2\Rightarrow\dfrac{1-\cos x}{-\sin\dfrac{x}{2}}=2\Rightarrow\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{-\sin\dfrac{x}{2}}=2;$

$\sin\dfrac{x}{2}\neq 0;\ \sin\dfrac{x}{2}=-1\Rightarrow\dfrac{x}{2}=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$.
$x=-\pi+4\pi n,\ n\in Z$.

Ответ: $-\pi+4\pi n,\ n\in Z$.

21. $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)+\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}+x\right)=\sqrt{2}$.

$\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}+x\right)=\sqrt{2}\Rightarrow\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)+$
$+\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)=\sqrt{2}\Rightarrow 2\cos\dfrac{\dfrac{\pi}{4}-\cancel{x}+\dfrac{\pi}{4}+\cancel{x}}{2}\cos\dfrac{\cancel{\dfrac{\pi}{4}}-x-\cancel{\dfrac{\pi}{4}}-x}{2}=$
$=\sqrt{2}\Rightarrow 2\cos\dfrac{\pi}{4}\cos(-x)=\sqrt{2}\Rightarrow 2\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x=\sqrt{2}\Rightarrow\cos x=1\Rightarrow$
$\Rightarrow x=2\pi n,\ n\in Z$.

Ответ: $2\pi n,\ n\in Z$.

22. $\cos x - 2\cos 3x + \cos 5x = 0.$

$\cos x + \cos 5x - 2\cos 3x = 0 \Rightarrow 2\cos 3x\cos 2x - 2\cos 3x = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2\cos 3x(\cos 2x - 1) = 0.$

$\cos 3x = 0 \Rightarrow 3x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3},\ n \in Z.$

$\cos 2x = 1 \Rightarrow 2x = 2\pi k,\ k \in Z.$

О т в е т: πk; $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3},\ k,\ n \in Z.$

23. $\cos\dfrac{3x}{2}\cos\dfrac{x}{2} + \cos x = 0{,}5.$

$\dfrac{1}{2}\cos x + \dfrac{1}{2}\cos 2x + \cos x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{2}(2\cos^2 x - 1) + \dfrac{3}{2}\cos x =$
$= \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0;\ \cos x = y;\ |y| \leqslant 1;$

$2y^2 + 3y - 2 = 0 \Rightarrow y_{1,\,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \dfrac{-3 \pm 5}{4}.$

$y_1 = -2$ не подходит; $y_2 = \dfrac{1}{2}.$

$\cos x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$

О т в е т: $\pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$

24. $\cos 4x = \sin^2 x - \dfrac{3}{4}.$

$2\cos^2 2x - 1 = \dfrac{1 - \cos 2x}{2} - \dfrac{3}{4} \Rightarrow 8\cos^2 2x - 4 = 2 - 2\cos 2x -$
$- 3 \Rightarrow 8\cos^2 2x + 2\cos 2x - 3 = 0,\ \cos 2x = y,\ |y| \leqslant 1.$

$8y^2 + 2y - 3 = 0 \Rightarrow y_{1,\,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{8} = \dfrac{-1 \pm 5}{8}.$

$y_1 = -\dfrac{3}{4};\ y_2 = \dfrac{1}{2}.$

1) $\cos 2x = -\dfrac{3}{4} \Rightarrow 2x = \pm\arccos\left(-\dfrac{3}{4}\right) + 2\pi n,\quad n \in Z \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \pm\dfrac{1}{2}\arccos\left(-\dfrac{3}{4}\right) + \pi n,\ n \in Z.$

2) $\cos 2x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z \Rightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z.$

О т в е т: $\pm\dfrac{\pi}{6} + \pi k$; $\pm\dfrac{1}{2}\arccos\left(-\dfrac{3}{4}\right) + \pi n,\ k,\ n \in Z.$

25. $\sin\left(3x - \dfrac{5\pi}{2}\right) = \sin(6x - 3\pi).$

$\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \sin(6x - \pi) \Rightarrow \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 3x\right) = \sin(\pi - 6x) \Rightarrow$
$\Rightarrow \cos 3x = \sin 6x \Rightarrow \cos 3x - 2\sin 3x\cos 3x = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \cos 3x(1 - 2\sin 3x) = 0.$

1) $\cos 3x = 0 \Rightarrow 3x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3},\ n \in Z.$

2) $\sin 3x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 3x = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z \Rightarrow$

$\Rightarrow x = (-1)^k \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{\pi k}{3},\ k \in Z.$

Ответ: $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3};\ (-1)^k \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{\pi k}{3},\ n,\ k \in Z.$

26. $4\sin^2 x + 4\sin x \cos x + 6\cos^2 x = 3.$

$4\sin^2 x + 4\sin x \cos x + 6\cos^2 x - 3\sin^2 x - 3\cos^2 x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin^2 x + 4\sin x \cos x + 3\cos^2 x = 0 \mid\ : \cos^2 x \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \operatorname{tg}^2 x + 4\operatorname{tg} x + 3 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = -1$ и $\operatorname{tg} x = -3.$

1) $\operatorname{tg} x = -1 \Rightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$

2) $\operatorname{tg} x = -3 \Rightarrow x = -\operatorname{arctg} 3 + \pi k,\ k \in Z.$

Ответ: $-\dfrac{\pi}{4} + \pi n;\ -\operatorname{arctg} 3 + \pi k,\ k,\ n \in Z.$

27. $\cos^6 x + \sin^6 x = \dfrac{15}{8}\cos 2x - \dfrac{1}{2}.$

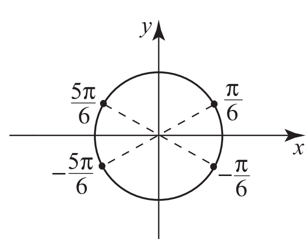
$(\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^4 x - \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x) = \dfrac{15}{8}(2\cos^2 x -$
$- 1) - \dfrac{1}{2} \Rightarrow \cos^4 x - \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x = \dfrac{15}{4}\cos^2 x - \dfrac{19}{8};$

$\cos^2 x = y;\ 0 \leqslant y \leqslant 1.$

$y^2 - y(1-y) + (1-y)^2 = \dfrac{15}{4}y - \dfrac{19}{8} \Rightarrow y^2 - y + y^2 + 1 - 2y +$
$+ y^2 - \dfrac{15}{4}y + \dfrac{19}{8} = 0 \Rightarrow 3y^3 - \dfrac{27}{4}y + \dfrac{27}{8} = 0 \Rightarrow y^2 - \dfrac{9}{4}y + \dfrac{9}{8} =$
$= 0 \Rightarrow 8y^2 - 18y + 9 = 0 \Rightarrow y_{1,\,2} = \dfrac{9 \pm \sqrt{81 - 72}}{8} = \dfrac{9 \pm 3}{8}.$

$y_1 = \dfrac{3}{4};\ y_2 = \dfrac{3}{2}$ не подходит.

$\cos^2 x = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \cos x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$



1) $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \pm\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n,$
$n \in Z.$

2) $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,$
$k \in Z.$

Ответ: $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$

28. $6\cos 5x\cos 7x+\dfrac{1}{3}=\cos 2x(8\cos 4x-1)+2\cos 6x.$

$\cancel{3\cos 2x}+3\cos 12x+\dfrac{1}{3}=\cancel{4\cos 2x}+4\cos 6x-\cancel{\cos 2x}+$ $+2\cos 6x\Rightarrow 3\cos 12x-6\cos 6x+\dfrac{1}{3}=0\Rightarrow$ $\Rightarrow 6\cos^2 6x-6\cos 6x-\dfrac{8}{3}=0\Rightarrow 18\cos^2 6x-18\cos 6x-8=0\Rightarrow$ $\Rightarrow 9\cos^2 6x-9\cos 6x-4=0;$ $\cos 6x=y.$

$9y^2-9y-4=0\Rightarrow y_{1,\,2}=\dfrac{9\pm\sqrt{81+144}}{18}=\dfrac{9\pm 15}{18}.$

$y_1=-\dfrac{1}{3};$ $y_2=\dfrac{4}{3}$ не подходит, т. к. $y\leqslant 1.$

$\cos 6x=-\dfrac{1}{3}\Rightarrow 6x=\pm\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)+2\pi n,\ n\in Z.$

$x=\pm\dfrac{1}{6}\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{\pi n}{3},\ n\in Z.$

Ответ: $\pm\dfrac{1}{6}\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{\pi n}{3},\ n\in Z.$

29. $\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=\sqrt{3}\ \mid\ :2\quad (2=\sqrt{1+3}).$

$\dfrac{1}{2}\sin 2x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\sin 2x\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos 2x\sin\dfrac{\pi}{3}=$ $=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow 2x+\dfrac{\pi}{3}=(-1)^n\dfrac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z\Rightarrow$ $\Rightarrow 2x=-\dfrac{\pi}{3}+(-1)^n\dfrac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z\Rightarrow x=-\dfrac{\pi}{6}+(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi n}{2},$ $n\in Z.$

1) $n=2k$ (четное); $x=-\cancel{\dfrac{\pi}{6}}+\cancel{\dfrac{\pi}{6}}+\dfrac{2\pi k}{2},\ k\in Z\Rightarrow x=\pi k,$ $k\in Z.$

2) $n=2m+1$ (нечетное);

$x=-\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi m}{2}+\dfrac{\pi}{2},\ m\in Z\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{6}+\pi m,\ m\in Z.$

Ответ: $\pi k;$ $\dfrac{\pi}{6}+\pi m,\ k,\ m\in Z.$

30. $\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\ \mid\ :\sqrt{2}\quad (\sqrt{2}=\sqrt{1+1}).$

$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x=1\Rightarrow\sin 2x\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos 2x\sin\dfrac{\pi}{4}=1\Rightarrow$ $\Rightarrow\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1\Rightarrow 2x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z\Rightarrow 2x=\dfrac{\pi}{4}+2\pi n,$ $n\in Z\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{8}+\pi n,\ n\in Z.$

Ответ: $\dfrac{\pi}{8}+\pi n,\ n\in Z.$

31. $2\sin x + 7\cos x = \dfrac{\sqrt{53}}{2} \ \Big|\ : \sqrt{53} \quad (\sqrt{53} = \sqrt{4+49})$.

$\dfrac{7}{\sqrt{53}}\ \sin x + \dfrac{7}{\sqrt{53}}\ \cos x = \dfrac{1}{2}$;

$\cos\varphi = \dfrac{2}{\sqrt{53}}$; $\sin\varphi = \dfrac{7}{\sqrt{53}} \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{7}{2}$.

$\sin x\cos\varphi + \cos x\sin\varphi = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \sin(x+\varphi) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x + \varphi = = (-1)^n\dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$.

$x = -\varphi + (-1)^n\dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$.

О т в е т: $-\operatorname{arctg}\dfrac{7}{2} + (-1)^n\dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$.

32. $\sqrt{25-4x^2}\,(3\sin 2\pi x + 8\sin\pi x) = 0$.

1) $\sqrt{25-4x^2} = 0 \Rightarrow 25 - 4x^2 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 25 \Rightarrow x^2 = \dfrac{25}{4} \Rightarrow \Rightarrow x = \pm\dfrac{5}{2}$.

2) $\begin{cases} 25 - 4x^2 \geqslant 0, \\ 3\sin 2\pi x + 8\sin\pi x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leqslant \dfrac{25}{4}, \\ 6\sin\pi x\cos\pi x + 8\sin\pi x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{5}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{5}{2}, \\ 2\sin\pi x(3\cos\pi x + 4) = 0. \end{cases}$

а) $\begin{cases} -\dfrac{5}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{5}{2}, \\ \sin\pi x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{5}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{5}{2}, \\ \cancel{\pi} x = \cancel{\pi} n,\ n \in Z \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2$.

б) $\cos\pi x = -\dfrac{4}{3}$ не имеет решений, т. к. $\cos\pi x \geqslant -1$.

О т в е т: $-2{,}5;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 2{,}5$.

33. $\dfrac{\cos x}{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2} = |\cos x|$; $x \neq -\dfrac{3}{2}$.

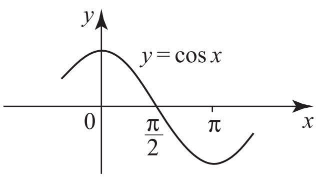
1) $\cos x \geqslant 0$;

$\cos x - \cos x\left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 = 0$; $\cos x\left(1 - x^2 - 3x - \dfrac{9}{4}\right) = 0$;

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$.

$x^2 + 3x + \dfrac{5}{4} = 0 \Rightarrow 4x^2 + 12x + 5 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{1,\,2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36-20}}{4} = \dfrac{-6 \pm 4}{4} \Rightarrow x_1 = -\dfrac{5}{2};\ x_2 = -\dfrac{1}{2}$.



а) $\cos\left(-\dfrac{5}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{5}{2}\right) > 0$?

$\dfrac{\pi}{2} < 2{,}5 < \pi$, $\cos 2{,}5 < 0$.

$x = -\dfrac{5}{2}$ не подходит.

б) $\cos\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \cos\dfrac{1}{2} > 0$?

$0 < \dfrac{1}{2} < \dfrac{\pi}{2}$, $\cos\dfrac{1}{2} > 0$.

2) $\cos x < 0$;

$\cos x + \cos x\left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 = 0$; $\cos x\left(1 + x^2 + 2x + \dfrac{9}{4}\right) = 0$.

$\cos x = 0$ не входит в область значений, т. к. $\cos x < 0$.

$x^2 + 3x + \dfrac{13}{4} = 0 \Rightarrow 4x^2 + 12x + 13 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{1,\,2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 - 52}}{4}$; $D < 0$, корней нет.

Ответ: $-\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

34. $x^{\frac{5}{4} - 2\cos 3x} = \sqrt[4]{x}$; $x \geqslant 0$.

1) $x = 0$; в этом случае должно быть $\dfrac{5}{4} - 2\cos 0 > 0$, но $\dfrac{5}{4} - 2 < 0 \Rightarrow x \neq 0$.

2) $x = 1$.

3) $x \neq 1$ и $\dfrac{5}{4} - 2\cos 3x = \dfrac{1}{4} \Rightarrow 2\cos 3x = 1 \Rightarrow \cos 3x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow 3x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z \Rightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{2\pi n}{3}$, $n \in Z$.

$x > 0 \Rightarrow n = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{9}$ $\left(x = -\dfrac{\pi}{9}\text{ не подходит}\right)$;

$n = 1 \Rightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{2\pi}{3} > 0$;

$n = -1 \Rightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{9} - \dfrac{2\pi}{3} < 0$ не подходит.

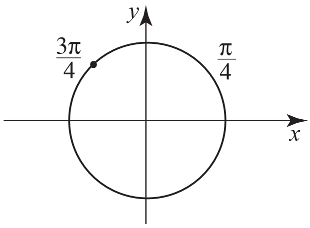
Ответ: $\dfrac{\pi}{9}$; 1; $\pm\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{2\pi n}{3}$, $n \in N$.

35. $\dfrac{1 + 2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\,\sin x + \sin 2x}{2\sin x\cos x - 1} = 1$.

$\sin 2x \neq 1 \Rightarrow 2x \neq \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z \Rightarrow x \neq \dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

$1 + 2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\,\sin x + \sin 2x = \sin 2x - 1 \Rightarrow 2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\,\sin x + 2 = 0$; $\sin x = y$; $|y| \leqslant 1$.

$2y^2 - 3\sqrt{2}\,y + 2 = 0 \Rightarrow y_{1,\,2} = \dfrac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{18 - 16}}{4} = \dfrac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{2}}{4}$.



$y_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $y_2 = \sqrt{2}$ — не подходит.

$\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = (-1)^k \dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z.$

$x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi m,\ m \in Z$ — не подходит.

Ответ: $\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z.$

36. $\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} x = 2 \operatorname{ctg} 4x.$

$\dfrac{\cos 2x}{\sin 2x} - \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{2\cos 4x}{\sin 4x}$; $\sin x \neq 0$; $\sin 2x \neq 0$; $\sin 4x \neq 0.$

$\dfrac{\sin x \cos 2x - \cos x \sin 2x}{\sin 2x \sin x} = \dfrac{2\cos 4x}{2\sin 2x \cos 2x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\sin(-x)}{\sin x} = \dfrac{2\cos^2 2x - 1}{\cos 2x} \Rightarrow \dfrac{2\cos^2 2x - 1}{\cos 2x} = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\cos^2 2x + \cos 2x - 1 = 0$; $\cos 2x = y$; $|y| \leqslant 1.$

$2y^2 + y - 1 = 0 \Rightarrow y_{1,\,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \dfrac{-1 \pm 3}{4} \Rightarrow y_1 = -1;$ $y_2 = \dfrac{1}{2}.$

$\cos 2x = -1 \Rightarrow 2x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$ не подходит, т. к. $\sin(\pi + 2\pi n) = 0.$

$\cos 2x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z \Rightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z.$

Ответ: $\pm\dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z.$

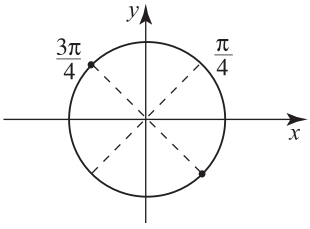
37. $3\dfrac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = 2\cos^2 x - 1$; $\operatorname{tg} x \neq 1$; $\cos x \neq 0.$

$3\dfrac{1 + \dfrac{\sin x}{\cos x}}{1 - \dfrac{\sin x}{\cos x}} = \cos 2x \Rightarrow 3\dfrac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = \cos 2x \Rightarrow$

$\Rightarrow 3\dfrac{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)}{(\cos x - \sin x)^2} =$

$= \cos 2x \Rightarrow 3\dfrac{\cos 2x}{1 - \sin 2x} - \cos 2x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 2x \left(\dfrac{3}{1 - \sin 2x} - 1\right) = 0.$



1) $\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,$ $n \in Z \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2},\ n \in Z.$

$x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$ не подходит, т. к. $\operatorname{tg} x \neq 1.$

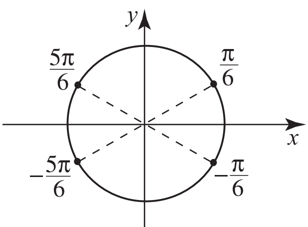
$x = \frac{3\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z.$

2) $3 - 1 + \sin 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x = -2$ не имеет решений, т. к. $\sin 2x \geqslant -1$.

Ответ: $\frac{3\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z.$

38. $\sin 3x = 8\sin^3 x.$

$\sin(2x + x) = 8\sin^3 x \Rightarrow \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = 8\sin^3 x \Rightarrow \Rightarrow 2\sin x\cos^2 x + \sin x - 2\sin^3 x = 8\sin^3 x \Rightarrow 2\sin x - 2\sin^3 x + + \sin x - 2\sin^3 x = 8\sin^3 x \Rightarrow 3\sin x - 4\sin^3 x = 8\sin^3 x \Rightarrow \Rightarrow 12\sin^3 x - 3\sin x = 0 \Rightarrow 3\sin x(4\sin^2 x - 1) = 0.$



1) $\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi n,\ n \in Z.$

2) $\sin^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin x = \pm\frac{1}{2}.$

$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$

$\sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z.$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$

39. $\sqrt{\cos x} = \sqrt{2}\sin\frac{x}{2};\ \sin\frac{x}{2} \geqslant 0.$

$\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \Rightarrow \cos x = 1 - \cos x \Rightarrow 2\cos x = 1 \Rightarrow \cos x = = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$

$\frac{x}{2} = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$

$\sin\frac{x}{2} \geqslant 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z.$

$x = (-1)^k\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z.$

Ответ: $x = (-1)^k\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z.$

40. $1 - \sin 3x = \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2.$

$1 - \sin 3x = \sin^2\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} \Rightarrow 1 - \sin 3x = = 1 - \sin x \Rightarrow \sin 3x - \sin x = 0 \Rightarrow 2\sin x\cos 2x = 0.$

1) $\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi n,\ n \in Z.$

2) $\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z.$

Ответ: $\pi n;\ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ n, k \in Z.$

41. $\sin 2x + \sin(\pi - 8x) = \sqrt{2}\cos 3x$.

$\sin 2x + \sin 8x = \sqrt{2}\cos 3x \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\sin 5x \cos 3x - \sqrt{2}\cos 3x = 0 \Rightarrow \cos 3x(2\sin 5x - \sqrt{2}) = 0$.

1) $\cos 3x = 0 \Rightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3},\ n \in Z$.

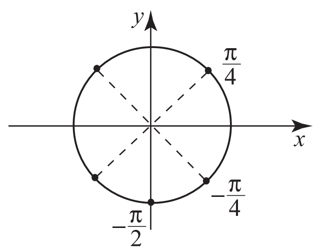
2) $\sin 5x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 5x = (-1)^k\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z \Rightarrow x = (-1)^k\frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5},\ k \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$; $(-1)^k\frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}$, $n,\ k \in Z$.

42. $2\sin^3 x - \cos 2x - \sin x = 0$.

$2\sin^3 x - 1 + 2\sin^2 x - \sin x = 0 \Rightarrow 2\sin^3 x + 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \Rightarrow 2\sin^2 x(\sin x + 1) - (\sin x + 1) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (\sin x + 1)(2\sin^2 x - 1) = 0$.

1) $\sin x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$.



2) $\sin^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$.

$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = (-1)^m\frac{\pi}{4} + \pi m$, $m \in Z$.

$x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$.

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $\pm\frac{\pi}{4} + \pi k$, $n,\ k \in Z$.

43. $\sin 2x + 2\operatorname{ctg} x = 3$; $\sin x \neq 0$.

$\frac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \frac{2}{\operatorname{tg} x} = 3$, $\cos x \neq 0 \Rightarrow 2\operatorname{tg}^2 x + 2 + 2\operatorname{tg}^2 x =$
$= 3\operatorname{tg} x + 3\operatorname{tg}^3 x \Rightarrow 3\operatorname{tg}^3 x - 4\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x - 2 = 0$; $\operatorname{tg} x = y$.

$3y^3 - 4y^2 + 3y - 2 = 0$.

Подбор $y = 1$: $3 - 4 + 3 - 2 = 0$.

Деление уголком:

$$
\begin{array}{r|l}
-\ 3y^3 - 4y^2 + 3y - 2 & y - 1 \\ \cline{2-2}
3y^3 - 3y^2 \phantom{{}+ 3y - 2} & 3y^2 - y + 2 \\ \cline{1-1}
-\ -y^2 + 3y \phantom{{}- 2} & \\
-y^2 + y \phantom{{}- 2} & \\ \cline{1-1}
-\ 2y - 2 & \\
2y - 2 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

$3y^2 - y + 2 = 0 \Rightarrow y_{1,\,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-24}}{6}$, нет корней.

$\operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$

Ответ: $\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$

44. $4\sin 2x \sin 5x \sin 7x - \sin 4x = 0.$

$4\sin 2x \sin 5x \sin 7x - 2\sin 2x \cos 2x = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2\sin 2x(\cos 2x - \cos 12x) - 2\sin 2x \cos 2x = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2\sin 2x(\cancel{\cos 2x} - \cos 12x - \cancel{\cos 2x}) = 0 \Rightarrow -2\sin 2x \cos 12x = 0.$

1) $\sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = \pi n,\ n \in Z \Rightarrow x = \dfrac{\pi n}{2},\ n \in Z.$

2) $\cos 12x = 0 \Rightarrow 12x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{24} + \dfrac{\pi k}{12},\ k \in Z.$

Ответ: $\dfrac{\pi n}{2};\ \dfrac{\pi}{24} + \dfrac{\pi k}{12},\ n,\ k \in Z.$

45. $\operatorname{tg}\dfrac{3x}{2} - \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = 2\sin x.$

$\dfrac{\sin\frac{3x}{2}}{\cos\frac{3x}{2}} - \dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = 2\sin x;\ \cos\dfrac{3x}{2} \neq 0$ и $\cos\dfrac{x}{2} \neq 0.$

$\dfrac{\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}} = 2\sin x \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\sin x}{\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}} - 2\sin x = 0 \Rightarrow \sin x\left(1 - 2\cos\dfrac{3x}{2}\cos\dfrac{x}{2}\right) = 0.$

1) $\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi n,\ n \in Z$; подходит только при n — четном, т. е. $n = 2k \Rightarrow x = 2\pi k,\ k \in Z.$

2) $1 - 2\cos\dfrac{3x}{2}\cos\dfrac{x}{2} = 0 \Rightarrow \cos\dfrac{3x}{2}\cos\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \cos x + \cos 2x = 1 \Rightarrow \cos x + 2\cos^2 x - 2 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 2 = 0 \Rightarrow \cos x = y;\ 2y^2 + y - 2 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow y_{1,\,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+16}}{4} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}.$

$y = \dfrac{-1-\sqrt{17}}{4} < -1$ не подходит.

$\cos x = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{4} \Rightarrow x = \pm\arccos\dfrac{\sqrt{17}-1}{4} + 2\pi m,\ m \in Z.$

Ответ: $2\pi k;\ \pm\arccos\dfrac{\sqrt{17}-1}{4} + 2\pi m,\ k,\ m \in Z.$

46. $\operatorname{tg} 5x - \operatorname{tg} 3x - 2\operatorname{tg} 2x = 0.$

$\cos 5x \neq 0;\ \cos 3x \neq 0;\ \cos 2x \neq 0.$

$$\frac{\sin 2x}{\cos 5x\cos 3x}-\frac{2\sin 2x}{\cos 2x}=0 \Rightarrow \sin 2x\left(\frac{\cos 2x-2\cos 5x\cos 3x}{\cos 2x\cos 3x\cos 5x}\right)=0.$$

1) $\sin 2x=0 \Rightarrow 2x=\pi n,\ n\in Z \Rightarrow x=\dfrac{\pi n}{2},\ n\in Z.$

2) $\cos 2x-\cos 2x-\cos 8x=0 \Rightarrow \cos 8x=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 8x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{16}+\dfrac{\pi k}{8},\ k\in Z.$

Ответ: $\dfrac{\pi n}{2};\ \dfrac{\pi}{16}+\dfrac{\pi k}{8},\ n,\ k\in Z.$

47. $\sqrt{\sin x}=\sqrt{1-2\sin^2 x} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x\geqslant 0,\\ \sin x=1-2\sin^2 x\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin x\geqslant 0,\\ 2\sin^2 x+\sin x-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x\geqslant 0,\\ (\sin x+1)\left(\sin x-\dfrac{1}{2}\right)=0\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin x\geqslant 0,\\ \sin x=-1,\ \sin x=\dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \sin x=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n,$
$n\in Z.$

Ответ: $(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z.$

48. $\sqrt[4]{3}\operatorname{tg}x-1=(\sqrt[4]{3}-1)\sqrt{\operatorname{tg}x}.$

$\operatorname{tg}x\geqslant 0;\ \sqrt{\operatorname{tg}x}=y\geqslant 0.$

$\sqrt[4]{3}y^2-1=(\sqrt[4]{3}-1)y \Rightarrow \sqrt[4]{3}y^2-(\sqrt[4]{3}-1)y-1=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y_{1,\,2}=\frac{(\sqrt[4]{3}-1)\pm\sqrt{\sqrt{3}-2\sqrt[4]{3}+1+4\sqrt[4]{3}}}{2\sqrt[4]{3}}=$$

$$=\frac{(\sqrt[4]{3}-1)\pm(\sqrt[4]{3}+1)}{2\sqrt[4]{3}} \Rightarrow y_1=1 \text{ и } y_2=-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}.$$

$y=-\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$ не подходит, т. к. $y\geqslant 0$.

$\sqrt{\operatorname{tg}x}=1 \Rightarrow \operatorname{tg}x=1 \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z.$

Ответ: $\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z.$

49. $6\cos x-\dfrac{1}{3}=\sqrt{32\cos x-\dfrac{17}{9}}.$

$6\cos x-\dfrac{1}{3}\geqslant 0 \Rightarrow \cos x\geqslant\dfrac{1}{18}.$

Возводим правую и левую части в квадрат:

$36\cos^2 x-4\cos x+\dfrac{1}{9}=32\cos x-\dfrac{17}{9} \Rightarrow 36\cos^2 x-36\cos x+$
$+2=0 \Rightarrow 18\cos^2 x-18\cos x+1=0;\ \cos x=y\geqslant\dfrac{1}{18}.$

$18y^2 - 18y + 1 = 0 \Rightarrow y_{1,\,2} = \dfrac{9 \pm \sqrt{81-18}}{18} = \dfrac{9 \pm \sqrt{63}}{18} = \dfrac{9 \pm 3\sqrt{7}}{18} = \dfrac{3 \pm \sqrt{7}}{6}$.

$\dfrac{3-\sqrt{7}}{6} > \dfrac{1}{18}? \Rightarrow 9 - 3\sqrt{7} > 1? \Rightarrow 3\sqrt{7} < 8? \Rightarrow 63 < 64$ — верно.

$\cos x = \dfrac{3 \pm \sqrt{7}}{6} \Rightarrow x = \pm \arccos \dfrac{3 \pm \sqrt{7}}{6} + 2\pi n,\ n \in Z.$

Ответ: $\pm \arccos \dfrac{3 \pm \sqrt{7}}{6} + 2\pi n,\ n \in Z.$

50. $\sqrt{-\cos x} = \sqrt{-1 + 2\sin^2 x}$.

$-\cos x \geqslant 0 \Rightarrow \cos x \leqslant 0.$

$-\cos x = -1 + 2\sin^2 x \Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) + \cos x - 1 = 0 \Rightarrow -2\cos^2 x + \cos x + 1 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$; $\cos x = y \leqslant 0.$

$2y^2 - y - 1 = 0 \Rightarrow y_{1,\,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \dfrac{1 \pm 3}{4} \Rightarrow y_1 = -\dfrac{1}{2}$ и $y_2 = 1.$

$y = 1$ не подходит, т. к. $y \leqslant 0.$

$\cos x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$

Ответ: $\pm \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$

Неравенства

Неравенство, в отличие от уравнения, вместо знака равенства содержит знаки неравенств ($>$, $<$, $\geqslant$, $\leqslant$). Неравенства со знаками $>$ и $<$ называются *строгими*, со знаками $\geqslant$ и $\leqslant$ — *нестрогими*.

Два неравенства $a > b$ и $c > d$ называются неравенствами одного знака, неравенства $a > b$ и $c < d$ — неравенствами противоположных знаков. Вместо двух неравенств $x > a$ и $x < b$ пишут $a < x < b$, это неравенство называется *двойным*.

Свойства неравенств:

1) если $a > b$, то $b < a$;

2) если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$;

3) если $a > b$ и c — число, то $a + c > b + c$;

4) если $a + b > c$, то $a - c > -b$;

5) если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$;

если $a > b$ и $c < 0$, то $ac < bc$, т. е. при умножении обеих частей неравенства на положительное число знак неравенства сохраняется, при умножении обеих частей неравенства на отрицательное число знак неравенства меняется на противоположный;

6) неравенства одного знака можно почленно складывать, например, если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$;

7) неравенства противоположных знаков можно почленно вычитать, ставя знак того неравенства, из которого производится вычитание, например, если $a > b$ и $c < d$, то $a - c > b - d$;

8) неравенства одного знака с положительными членами можно почленно умножать, например, если $a > b > 0$, $c > d > 0$, то $ac > bd$;

9) обе части неравенства с положительными членами можно возводить в натуральную степень, например, если $a > b > 0$, то $a^k > b^k$, $k \in N$.

Решением неравенства считается такое множество значений переменной, при котором каждое число этого множества превращает исходное неравенство в верное числовое неравенство.

Линейным называется неравенство вида $ax > b$ (или $ax < b$; $ax \geqslant b$; $ax \leqslant b$), где $a \neq 0$ и b — числа.

Решение линейного неравенства:

1) если $a > 0$, $x > \dfrac{b}{a}$, или $x \in \left(\dfrac{b}{a}; \infty\right)$;

2) если $a < 0$, то $x < \frac{b}{a}$, или $x \in \left(-\infty;\ \frac{b}{a}\right)$.

Соответственно решаются и другие линейные неравенства.

Здесь действует свойство 5.

Квадратичное неравенство — это неравенство вида: $ax^2 + bx + c > 0$ (< 0; $\geqslant 0$; $\leqslant 0$).

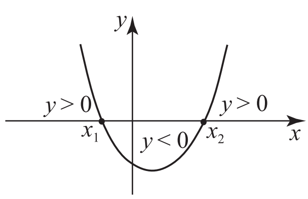
Если $a > 0$ и x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то решением этого неравенства будут $x \in (-\infty;\ x_1) \cup (x_2;\ \infty)$; если $a < 0$, то $x \in (x_1;\ x_2)$.

Другие квадратичные неравенства решаются аналогично. Например: $ax^2 + bx + c \leqslant 0$; $a > 0$, x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$; тогда решение неравенства: $x \in [x_1;\ x_2]$.

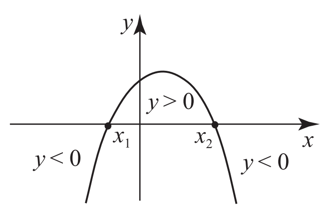
Если уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней, то при $a > 0$ соответствующая парабола расположена над осью Ox, и $ax^2 + bx + c > 0$ при всех x, т. е. $x \in (-\infty;\ \infty)$ — решение неравенства $ax^2 + bx + c > 0$; при $a < 0$ парабола находится под осью Ox и $ax^2 + bx + c < 0$ при всех x, т. е. $x \in (-\infty;\ \infty)$ — решение неравенства $ax^2 + bx + c < 0$.

Все, что было сказано, удобно проиллюстрировать с помощью графиков:

$$D > 0$$

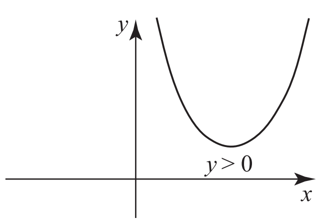


$y = ax^2 + bx + c,\ a > 0.$

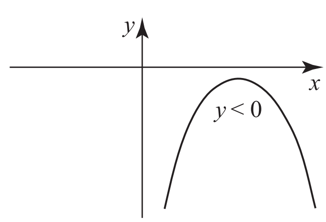


$y = ax^2 + bx + c,\ a < 0.$

$$D < 0$$



$y = ax^2 + bx + c,\ a > 0.$



$y = ax^2 + bx + c,\ a < 0.$

Рациональные неравенства, т. е. неравенства вида: $P_n(x) > 0$ (< 0, $\geqslant 0$, $\leqslant 0$); $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0$ (< 0, $\geqslant 0$, $\leqslant 0$), где $P_n(x)$

и $Q_m(x)$ — многочлены степеней n и m, обычно решаются *методом интервалов*. Отметим, что неравенство $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0$ равносильно неравенству $P_n(x)Q_m(x) > 0$. Для того, чтобы решить неравенство $P_n(x) > 0$ методом интервалов, нужно разложить многочлен $P_n(x)$ на множители:

$$P_n(x) = (a_1x - b_1)^{k_1}(a_2x - b_2)^{k_2}\ldots,$$

затем найти все нули многочлена, т. е. значения x, которые обращают в 0 каждую скобку; отметить их на числовой оси и пользоваться таким правилом:

1) за крайней правой точкой всегда ставится «+»;

2) после следующей точки знак меняется на «−», если степень соответствующей скобки нечетная; если степень четная — знак сохраняется;

3) каждый раз при переходе через отмеченную точку знак меняется, если степень скобки, относящейся к этой точке, нечетная, и не меняется, если степень четная.

Квадратичные неравенства также можно решать методом интервалов, если разложить квадратный трехчлен на множители: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Примеры.

1. $2x + 6 < 0$.

$2x < -6 \Leftrightarrow x < -3$.

Ответ: $x \in (-\infty;\ -3)$.

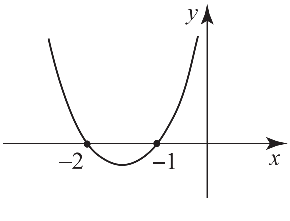
2. $\dfrac{x+4}{7} - \dfrac{x+7}{4} \geqslant -3$.

$$\frac{4x + 16 - 7x - 49}{28} \geqslant -3 \Leftrightarrow \frac{-3x + 33}{28} \geqslant -3 \Leftrightarrow \frac{x + 11}{28} \leqslant 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x + 11 \leqslant 28 \Leftrightarrow x \leqslant 17.$$

Ответ: $x \in (-\infty; 17]$.

3. $x^2 + 3x + 2 > 0$.

Решим уравнение $x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1$ и $x_2 = -2$. Парабола $y = x^2 + 3x + 2$ выглядит так, как на рисунке.



$x^2 + 3x + 2 > 0$ при $x \in (-\infty;\ -2) \cup (-1; \infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty;\ -2) \cup (-1; \infty)$.

4. $x^2 + x + 1 < 0$.

Решим уравнение $x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,\,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$, решений нет, т. к. $D < 0$.

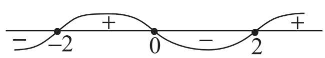
Поэтому, $x^2 + x + 1 > 0$ при всех x, и неравенство $x^2 + x + 1 < 0$ не имеет решений.

Ответ: $\varnothing$.

5. $x^3 - 4x \leqslant 0$.

$x(x^2 - 4) \leqslant 0 \Leftrightarrow x(x-2)(x+2) \leqslant 0$.

Метод интервалов:

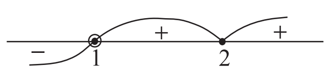


Ответ: $x \in (-\infty;\ -2] \cup [0;\, 2]$.

6. $x \leqslant 3 - \dfrac{1}{x-1}$.

$$x - 3 + \frac{1}{x-1} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(x-3)(x-1)+1}{x-1} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x + 4}{x-1} \leqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{x-1} \leqslant 0.$$

Метод интервалов:



Ответ: $x \in (-\infty;\, 1) \cup \{2\}$.

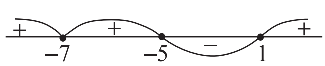
Если неравенство строгое или некоторые скобки находятся в знаменателе, то соответствующие точки обводятся кружками (вырезаются).

В примере 6 нужно обратить внимание на то, что в решение входит число 2, т. к. неравенство нестрогое.

7. $(x+7)^2(x-1)(5+x)^5 > 0$.

$(x+7)^2(x-1)(x+5)^5 > 0$.

Метод интервалов:



Ответ: $x \in (-\infty;\ -7) \cup (-7;\ -5) \cup (1;\, \infty)$.

Как и при решении уравнений, одним из способов решения неравенств вида $F(x) > 0$ (< 0; $\geqslant 0$; $\leqslant 0$) является разложение $F(x)$ на множители и затем оценки знаков сомножителей.

8. $(2^x - 4)(x^2 - 2x - 3) > 0$.

Неравенство равносильно 4-м системам:

1) $\begin{cases} 2^x - 4 > 0, \\ x + 1 > 0, \\ x - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2, \\ x > -1, \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3.$

2) $\begin{cases} 2^x - 4 > 0, \\ x + 1 < 0, \\ x - 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2, \\ x < -1, \\ x < 3 \end{cases}$ решений нет.

3) $\begin{cases} 2^x - 4 < 0, \\ x + 1 > 0, \\ x - 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2, \\ x > -1, \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 2.$

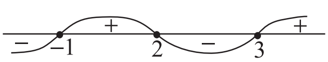
4) $\begin{cases} 2^x - 4 < 0, \\ x + 1 < 0, \\ x - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2, \\ x < -1, \\ x > 3 \end{cases}$ решений нет.

Ответ: $x \in (-1; 2) \cup (3; \infty)$.

Это же неравенство можно решить иначе:

$(2^x - 4)(x^2 - 2x - 3) > 0 \Leftrightarrow (2^x - 2^2)(x - 3)(x + 1) > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x - 2)(x - 3)(x + 1) > 0$.

Метод интервалов:



Ответ: $x \in (-1; 2) \cup (3; \infty)$.

Ни в коем случае в неравенствах нельзя избавляться от знаменателя, содержащего переменную величину, умножать и делить на выражения, содержащие переменную, т. к. знак этого выражения может быть отрицательным, а в этом случае меняется знак неравенства.

Неравенства с радикалами так же, как и уравнения решаются возведением в степень обеих частей неравенства. Однако нужно помнить основное правило: возводить неравенство в четную степень запрещается при тех значениях неизвестной, при которых хотя бы одна из частей неравенства отрицательна.

9. $\sqrt{-x^2 - 3x} < x + 7$.

$$\begin{cases} -x^2 - 3x < x^2 + 14x + 49, \\ x + 7 > 0, \\ -x^2 - 3x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 17x + 49 > 0, \\ x > -7, \\ -3 \leqslant x \leqslant 0. \end{cases}$$

Решим уравнение: $2x^2 + 17x + 49 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x_{1,\,2} = \dfrac{-17 \pm \sqrt{289 - 392}}{4}$, решений нет, т. к. $D < 0$.

$2x^2 + 17x + 49 > 0$ при всех x.

Ответ: $x \in [-3; 0]$.

10. $\sqrt{x+2}\,\sqrt{x-1}\,(x-7) < 0$.

Т. к. $\sqrt{x+2} \geqslant 0$ и $\sqrt{x-1} \geqslant 0$, то неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x+2>0, \\ x-1>0, \\ x-7<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2, \\ x>1, \\ x<7 \end{cases} \Leftrightarrow 1<x<7.$$

Ответ: $x \in (1; 7)$.

11. $4x - 6 > \sqrt{6x - 2x^2}$.

$4x - 6 \geqslant 0$, т. к. $\sqrt{6x-2x^2} \geqslant 0$.

$$\begin{cases} 4x-6 \geqslant 0, \\ (4x-6)^2 > 6x-2x^2, \\ 6x-2x^2 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant \dfrac{3}{2}, \\ 16x^2-48x+36 > 6x-2x^2, \\ 6x-2x^2 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant \dfrac{3}{2}, \\ 18x^2-54x+36>0, \\ 2x(x-3) \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant \dfrac{3}{2}, \\ x^2-3x+2>0, \\ x(x-3) \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant \dfrac{3}{2}, \\ (x-1)(x-2)>0, \\ x(x-3) \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant \dfrac{3}{2}, \\ x<1 \text{ и } x>2, \\ 0 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x \leqslant 3.$$

Ответ: $x \in (2; 3]$.

Решение ***показательных*** неравенств основано на том, что функция $y = a^x$ при $a > 1$ является монотонно возрастающей, а при $0 < a < 1$ — монотонно убывающей. Отсюда следует:

1) $\begin{cases} a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}, \\ a>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > \varphi(x), \\ a>1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}, \\ 0<a<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < \varphi(x), \\ 0<a<1. \end{cases}$

Неравенство $a^{f(x)} \geqslant b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, может быть решено путем логарифмирования обеих его частей, т. к. обе части неравенства положительны. Если $b \leqslant 0$, то неравенство справедливо при всех допустимых значениях x. Неравенство $a^{f(x)} \leqslant b$ при $b \leqslant 0$, $a > 0$, $a \neq 1$ не имеет решений.

Простейшие показательные неравенства.

1. $\begin{cases} a^{f(x)} > b, \\ a > 1, \\ b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > \log_a b, \\ a > 1, \\ b > 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} a^{f(x)} > b, \\ 0 < a < 1, \\ b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < \log_a b, \\ 0 < a < 1, \\ b > 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} a^{f(x)} > b, \\ a > 0, \\ b < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\infty < f(x) < \infty, \\ a > 0, \\ b < 0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} a^{f(x)} < b, \\ a > 1, \\ b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < \log_a b, \\ a > 1, \\ b > 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} a^{f(x)} < b, \\ 0 < a < 1, \\ b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > \log_a b, \\ 0 < a < 1, \\ b > 0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} a^{f(x)} < b \\ a > 0 \\ b < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ решений нет.

Преобразования показательных неравенств совершаются так же, как и уравнений — путем приведения к одинаковому основанию, методом разложения на множители, путем замены переменных и сведения к рациональному (например квадратичному) неравенству.

12. $\left(\frac{1}{3}\right)^{5-3x} \leqslant 81.$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{5-3x} \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} \Leftrightarrow 5 - 3x \geqslant -4 \Leftrightarrow 3x \leqslant 9 \Leftrightarrow x \leqslant 3.$

О т в е т: $x \in (-\infty; 3]$.

13. $2^{\frac{3x}{2}+3} > 16.$

$2^{\frac{3x}{2}+3} > 2^4 \Leftrightarrow \frac{3x}{2} + 3 > 4 \Leftrightarrow \frac{3x}{2} > 1 \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}.$

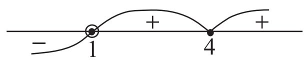
О т в е т: $x \in \left(\frac{2}{3}; \infty\right)$.

14. $2^x + \frac{9}{2^x - 1} > 7.$

Заменим $2^x = y > 0$;

$$y+\frac{9}{y-1}>7 \Leftrightarrow \frac{y^2-y+9}{y-1}-7>0 \Leftrightarrow \frac{y^2-y+9-7y+7}{y-1}>0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{y^2-8y+16}{y-1}>0 \Leftrightarrow \frac{(y-4)^2}{y-1}>0.$$

Метод интервалов:



$y \in (1;\, 4) \cup (4;\, \infty)$.

1) $1 < 2^x < 4 \Leftrightarrow 2^0 < 2^x < 2^2 \Leftrightarrow 0 < x < 2$.

2) $2^x > 4 \Leftrightarrow 2^x > 2^2 \Leftrightarrow x > 2$.

О т в е т: $x \in (0;\, 2) \cup (2;\, \infty)$.

15. $7^{x+3} > 7 \cdot 5^{2x-1}$.

$7^{x+2} > 5^{2x-1}$; логарифмируем по основанию 7:

$\log_7 7^{x+2} > \log_7 5^{2x-1} \Leftrightarrow x+2 > (2x-1)\log_7 5 \Leftrightarrow x+2 > > 2x\log_7 5 - \log_7 5 \Leftrightarrow x - 2x\log_7 5 > -2 - \log_7 5 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x(1-2\log_7 5) > -2-\log_7 5 \Leftrightarrow x(2\log_7 5 - 1) < 2 + \log_7 5$.

$2\log_7 5 > 1$, т. к. $\log_7 25 > \log_7 7$.

Поэтому $x < \dfrac{2+\log_7 5}{2\log_7 5 - 1}$.

О т в е т: $x \in \left(-\infty;\, \dfrac{2+\log_7 5}{2\log_7 5 - 1}\right)$.

16. $3^x - 2^{x+4} > 3^{x-1} - 55 \cdot 2^{x-2}$.

$3^x - 3^{x-1} > 2^{x+4} - 55\cdot 2^{x-2} \Leftrightarrow 3^x\left(1-\dfrac{1}{3}\right) > 2^x\left(16 - \dfrac{55}{4}\right) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3^x \cdot \dfrac{2}{3} > 2^x \cdot \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow 3^x \cdot \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{9} > 2^x \cdot \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 3^{x-3} > 2^{x-3} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^{x-3} > 1 \Leftrightarrow x-3>0 \Leftrightarrow x>3$.

О т в е т: $x \in (3;\, \infty)$.

17. $2^{2x^2-x-1} < \left(\dfrac{1}{2}\right)^{10x^2}$.

$2^{2x^2-x-1} < 2^{-10x^2} \Leftrightarrow 2x^2-x-1 < -10x^2 \Leftrightarrow 12x^2-x-1<0$.

Уравнение $12x^2-x-1$ имеет корни:

$x_{1,\,2} = \dfrac{1\pm\sqrt{1+48}}{24} = \dfrac{1\pm 7}{24} \Leftrightarrow x_1 = -\dfrac{1}{4}$ и $x_2 = \dfrac{1}{3}$; $\Rightarrow$ решение неравенства: $-\dfrac{1}{4} < x < \dfrac{1}{3}$.

О т в е т: $x \in \left(-\dfrac{1}{4};\, \dfrac{1}{3}\right)$.

Решение ***логарифмических*** неравенств основано на том, что функция $y = \log_a x$ при $a > 1$ является монотонно возрастающей, а при $0 < a < 1$ — монотонно убывающей. Отсюда следует:

$$1)\ \begin{cases} \log_a f(x) > \log_a \varphi(x), \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > \varphi(x), \\ \varphi(x) > 0, \\ a > 1. \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} \log_a f(x) > \log_a \varphi(x), \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < \varphi(x), \\ f(x) > 0, \\ 0 < a < 1. \end{cases}$$

При избавлении от знака логарифма, т.е. при потенцировании, очень важно не забывать об ограничениях на аргумент и основание логарифма.

Простейшие логарифмические неравенства:

$$1)\ \begin{cases} \log_a f(x) > b, \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > a^b, \\ a > 1; \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} \log_a f(x) > b, \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < f(x) < a^b, \\ 0 < a < 1; \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} \log_a f(x) < b, \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < f(x) < a^b, \\ a > 1; \end{cases}$$

$$4)\ \begin{cases} \log_a f(x) < b, \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > a^b, \\ 0 < a < 1. \end{cases}$$

Все преобразования в логарифмических неравенствах аналогичны преобразованиям в логарифмических уравнениях. Важную роль играют переход к новому основанию логарифма, упрощение логарифмического выражения, разложение на множители.

18. $\log_{\frac{1}{3}}(7 - x) > -2$.

$\log_{\frac{1}{3}}(7 - x) > -2\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}(7 - x) > \log_{\frac{1}{3}} 9 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7 - x < 9, \\ 7 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2, \\ x < 7. \end{cases}$$

О т в е т: $x \in (-2; 7)$.

19. $\log_5(3x + 1) > \log_5(x - 2)$.

$$\begin{cases} 3x + 1 > x - 2, \\ 3x + 1 > 0, \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x > -3, \\ 3x > -1, \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{3}{2}, \\ x > -\dfrac{1}{3}, \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2.$$

О т в е т: $x \in (2; \infty)$.

20. $(x-1)\log_2 x > (2x+3)\log_2 x$.

$(x-1)\log_2 x - (2x+3)\log_2 x > 0 \Leftrightarrow \log_2 x(x-1-2x-3) > > 0 \Leftrightarrow (x+4)\log_2 x < 0$.

1) $\begin{cases} x+4>0, \\ x>0, \\ \log_2 x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-4, \\ x>0, \\ x<1 \end{cases} \Leftrightarrow 0<x<1;$

2) $\begin{cases} x+4<0, \\ x>0, \\ \log_2 x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-4, \\ x>0, \\ x>1 \end{cases}$ решений нет.

О т в е т: $x \in (0;\,1)$.

21. $\log_8(x^2-4x+3) < 1$.

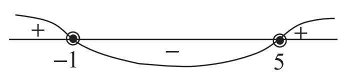
$\begin{cases} x^2-4x+3>0, \\ x^2-4x+3<8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+3>0, \\ x^2-4x-5<0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-3)>0, \\ (x+1)(x-5)<0. \end{cases}$

Решим каждое неравенство методом интервалов:

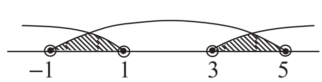
1) 

$x<1$ и $x>3$;

2) 

$-1<x<5$;

Объединяем решения:



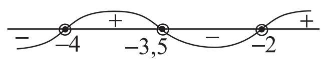
О т в е т: $x \in (-1;\,1) \cup (3;\,5)$.

22. $\lg\dfrac{x+3}{x+4} > \lg\dfrac{x+5}{x+2}$.

$\begin{cases} \dfrac{x+3}{x+4} > \dfrac{x+5}{x+2}, \\ \dfrac{x+3}{x+4} > 0, \\ \dfrac{x+5}{x+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+3)(x+2)-(x+4)(x+5)}{(x+4)(x+2)} > 0, \\ \dfrac{x+3}{x+4} > 0, \\ \dfrac{x+5}{x+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5x+6-9x-20}{(x+4)(x+2)} > 0, \\ \dfrac{x+3}{x+4} > 0, \\ \dfrac{x+5}{x+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4x+14}{(x+4)(x+2} < 0, \\ \dfrac{x+3}{x+4} > 0, \\ \dfrac{x+5}{x+2} > 0 \end{cases}$$

Решаем каждое неравенство методом интервалов.

1) 

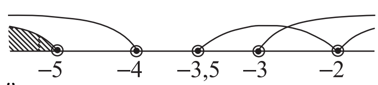
$x < -4$ и $-3{,}5 < x < -2$.

2) 

$x < -4$ и $x > -3$.

3) 

$x < -5$ и $x > -2$.

Объединяем решения: 

Только крайний левый интервал удовлетворяет всем трем неравенствам.

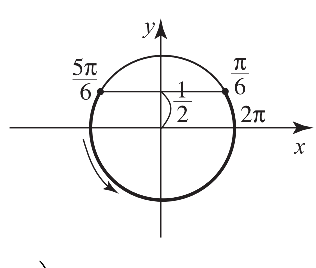
О т в е т: $x \in (-\infty;\ -5)$.

Тригонометрические неравенства возникают, как правило, при решении тригонометрических уравнений в качестве ограничений. Они сводятся к простейшим тригонометрическим неравенствам вида: $\sin x > a$, $\cos x > a$, $\operatorname{tg} x > a$, $\operatorname{ctg} x > a$ $(<, \geqslant, \leqslant)$ и решаются с помощью тригонометрического круга.

23. $\sin x < \dfrac{1}{2}$.

Решим уравнение: $\sin x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$.

Отметим это решение на окружности. Неравенству $\sin x < \dfrac{1}{2}$ удовлетворяют все x, синусы которых расположены ниже горизонтали $y = \dfrac{1}{2}$.

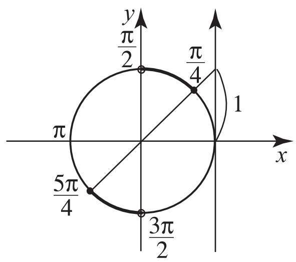


О т в е т: $x \in \left(\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ 2\pi + \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$ или $x \in \left(\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ \dfrac{13\pi}{6} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$.

24. $\operatorname{tg} x \geqslant 1$.

Решаем $\operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$.

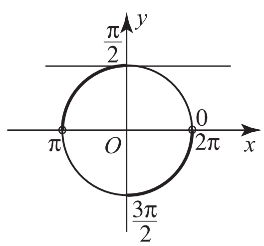
Отмечаем на окружности решения:



Ответ: $x \in \left[\dfrac{\pi}{4} + \pi k;\ \dfrac{\pi}{2} + \pi k\right),\ k \in Z$.

25. $\operatorname{ctg} x \leqslant 0$.

$\operatorname{ctg} x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$.



Ответ: $x \in \left[\dfrac{\pi}{2} + \pi n;\ \pi + \pi n\right),\ n \in Z$.

26. Решить уравнение $(1 + \operatorname{tg}^2 x)\sin x - \operatorname{tg}^2 x + 1 = 0$ при условии, что $\operatorname{tg} x < 0$.

$\cos x \neq 0$.

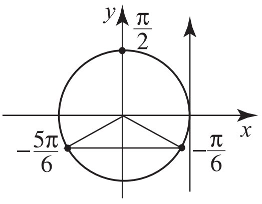
$$\left(1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)\sin x - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$\Leftrightarrow -\sin^2 x + \sin x + 1 - \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$; $\sin x = y$; $|y| \leqslant 1$.

$2y^2 - y - 1 = 0 \Leftrightarrow y_{1,\,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{24} \Leftrightarrow y_1 = -\dfrac{1}{2}$ и $y_2 = 1$.

1) $\sin x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$;

2) $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Отметим решения на окружности:



Условию $\operatorname{tg} x < 0$ удовлетворяет только решение $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$.

О т в е т: $-\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Решение неравенств

РАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

1. $\dfrac{2x+2}{5}-\dfrac{x-1}{2}<2.$

$\dfrac{4x+4-5x+5}{10}<2 \Leftrightarrow 4x+4-5x+5-20<0 \Leftrightarrow -x-11<$ $<0 \Rightarrow x>-11.$

Ответ: $x\in(-11;\,\infty).$

2. $2(x-3)-1>3(x-2)-4(x+1).$

$2x-6-1>3x-6-4x-4 \Leftrightarrow 2x-3x+4x>1-4 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3x>-3 \Leftrightarrow x>-1.$

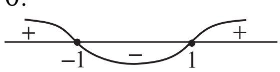
Ответ: $x\in(-1;\,\infty).$

3. $x^2+x<x(x+5)+5.$

$x^2+x<x^2+5x+5 \Leftrightarrow -4x<5 \Leftrightarrow x>-\dfrac{5}{4}.$

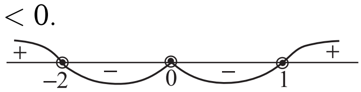
Ответ: $x\in\left(-\dfrac{5}{4};\,\infty\right).$

4. $(x-1)(x+1)\leqslant 0.$

Метод интервалов: 

Ответ: $x\in[-1;\,1].$

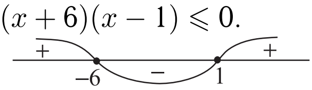
5. $x^2(x-1)(x+2)<0.$

Метод интервалов: 

Ответ: $x\in(-2;\,0)\cup(0;\,1).$

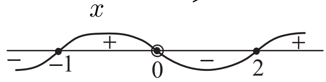
6. $-x^2-5x+6\geqslant 0.$

$x^2+5x-6\leqslant 0 \Leftrightarrow (x+6)(x-1)\leqslant 0.$

Метод интервалов: 

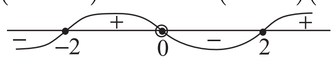
Ответ: $x\in[-6;\,1].$

7. $\dfrac{x^2-x-2}{x}\geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-2)(x+1)}{x}\geqslant 0.$

Метод интервалов: 

Ответ: $x\in[-1;\,0)\cup[2;\,\infty).$

8. $x^3 - 4x < 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) < 0 \Leftrightarrow x(x-2)(x+2) < 0.$

Метод интервалов: 

Ответ: $x \in (-\infty;\ -2) \cup (0;\, 2)$.

9. $3x^2 - 4x + 5 \leqslant 0$.

Ищем корни уравнения: $3x^2 - 4x + 5 = 0$;

$x_{1,\,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 15}}{3}$ — корней нет, т. к. $D < 0$.

$3x^2 - 4x + 5 > 0$ при всех x.

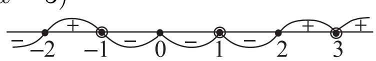
Ответ: $\varnothing$.

10. $(x-2)^2 < 25 \Leftrightarrow (x-2)^2 - 25 < 0 \Leftrightarrow (x - 2 - 5)(x - 2 + 5) < 0 \Leftrightarrow (x-7)(x+3) < 0.$

Метод интервалов: 

Ответ: $x \in (-3;\, 7)$.

11. $\dfrac{(x-1)(x-2)(x+2)^3x^2}{(x-1)(x+1)(x-3)^4} \geqslant 0.$

Метод интервалов: 

Ответ: $x \in [-2;\ -1) \cup [2;\, 3) \cup (3;\, \infty)$.

12. $\dfrac{(x+3)^2(x^2+x+1)}{x+1} > 0.$

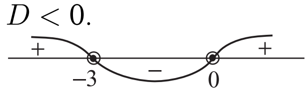
$x^2 + x + 1 > 0$, т. к. уравнение $x^2 + x + 1 = 0$ не имеет корней ($D = 1 - 4 < 0$).

$\dfrac{(x+3)^2}{x+1} > 0$. Метод интервалов: 

Ответ: $x \in (-1;\, \infty)$.

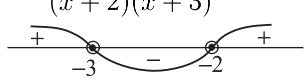
13. $\dfrac{x^3 + 27}{x} \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x+3)(x^2 - 3x + 9)}{x} \leqslant 0.$

$x^2 - 3x + 9 > 0$ при всех x, т. к. соответствующее уравнение $x^2 - 3x + 9 = 0$ не имеет корней, $D < 0$.

$\dfrac{x+3}{x} \leqslant 0$. Метод интервалов: 

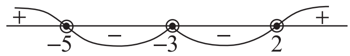
Ответ: $x \in [-3;\, 0)$.

14. $\dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 5x + 6} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x+2)^2}{(x+2)(x+3)} < 0.$

Метод интервалов: 

Ответ: $x \in (-3;\ -2)$.

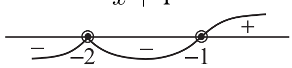
15. $(x+3)^2(x-2)(5+x)^3 < 0 \Leftrightarrow (x+3)^2(x-2)(x+5)^3 < 0.$

Метод интервалов: 

Ответ: $x \in (-5;\ -3) \cup (-3;\ 2).$

16. $x + 3 < -\dfrac{1}{x+1} \Leftrightarrow x + 3 + \dfrac{1}{x+1} < 0 \Leftrightarrow$

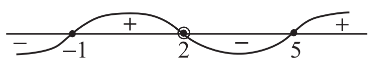
$\Leftrightarrow \dfrac{x^2+3x+x+3+1}{x+1} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+4x+4}{x+1} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x+2)^2}{x+1} < 0.$

Метод интервалов: 

Ответ: $x \in (-\infty;\ -2) \cup (-2;\ -1).$

17. $\dfrac{x+7}{x-2} > x - 1 \Leftrightarrow \dfrac{x+7}{x-2} - x + 1 > 0 \Leftrightarrow$

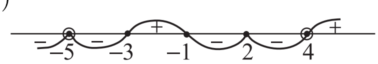
$\Leftrightarrow \dfrac{x+7-x^2+2x+x-2}{x-2} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x^2+4x+5}{x-2} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-4x-5}{x-2} <$
$< 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-5)(x+1)}{x-2} < 0.$

Метод интервалов: 

Ответ: $x \in (-\infty;\ -1) \cup (2;\ 5).$

18. $\dfrac{(4-x)^3(x+3)(-x-1)^3(x-2)^2}{(-5-x)^4(16-4x)^2} \leqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x-4)^3(x+3)(x+1)^3(x-2)^2}{(x+5)^4(x-4)^2} \leqslant 0.$

Метод интервалов: 

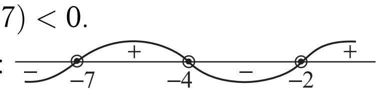
Ответ: $x \in (-\infty;\ -5) \cup (-5;\ -3] \cup [-1;\ 4).$

19. $\dfrac{(x-2)(x-4)(x-7)}{(x+2)(x+4)(x+7)} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{(x-2)(x-4)(x-7)}{(x+2)(x+4)(x+7)} -$
$-1 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-2)(x^2-11x+28)-(x+2)(x^2+11x+28)}{(x+2)(x+4)(x+7)} > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^3-11x^2+28x-2x^2+22x-56-x^3-11x^2-28x-2x^2-22x-56}{(x+2)(x+4)(x+7)} >$
$> 0 \Leftrightarrow \dfrac{-26x^2-112}{(x+2)(x+4)(x+7)} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{13x^2+56}{(x+2)(x+4)(x+7)} < 0.$

$13x^2 + 56 > 0$ при всех x.

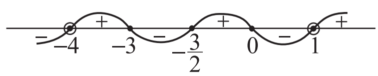
$(x+2)(x+4)(x+7) < 0.$

Метод интервалов: 

Ответ: $x \in (-\infty;\ -7) \cup (-4;\ -2).$

20. $(x^2+3x)(2x+3) \geqslant 16\dfrac{2x+3}{x^2+3x} \Leftrightarrow (2x+3)\times$
$\times\left(x^2+3x-\dfrac{16}{x^2+3x}\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow (2x+3)\dfrac{(x^2+3x)^2-16}{x^2+3x} \geqslant 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (2x+3)\dfrac{(x^2+3x-4)(x^2+3x+4)}{x(x+3)} \geqslant 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \dfrac{(2x+3)(x+4)(x-1)(x^2+3x+4)}{x(x+3)} \geqslant 0.$

$x^2+3x+4>0$ при всех x, т. к. уравнение $x^2+3x+4=$ $=0$ не имеет корней: $D=9-16<0$; неравенство равносильно $\dfrac{\left(x+\frac{3}{2}\right)(x+4)(x-1)}{x(x+3)} \geqslant 0.$

Метод интервалов: 

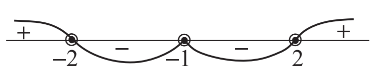
О т в е т: $x \in [-4;\ -3) \cup \left[-\dfrac{3}{2};\ 0\right] \cup [1;\ \infty).$

21. $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x+8} \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2(x-1)+(x-1)}{x+8} \leqslant 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \dfrac{(x-1)(x^2+1)}{x+8} \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x+8} \leqslant 0$, т. к. $x^2+1>0$ при всех x.

Метод интервалов: 

О т в е т: $x \in (-8;\ 1].$

22. $\dfrac{x^4-2x^2-8}{x+2x+1} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x^2-4)(x^2+2)}{(x+1)^2} < 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \dfrac{(x-2)(x+2)(x^2+2)}{(x+1)^2} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x+1)^2} < 0$, т. к. $x^2+2>0$ при всех x.

Метод интервалов: 

О т в е т: $x \in (-2;\ -1) \cup (-1;\ 2).$

23. $\dfrac{5x+4}{3+x} - \dfrac{2+x}{1-x} \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{(5x+4)(1-x)-(2+x)(3+x)}{(x+3)(1-x)} \leqslant 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \dfrac{5x+4-5x^2-4x-6-3x-2x-x^2}{(x+3)(1-x)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{-6x^2-4x-2}{(x+3)(1-x)} \leqslant 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \dfrac{3x^2+2x+1}{(x+3)(x-1)} \leqslant 0.$

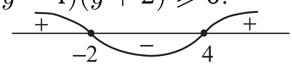
$3x^2+2x+1=0 \Rightarrow x_{1,\,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-3}}{3}$, $D<0$, корней нет $\Rightarrow$ $\Rightarrow 3x^2+2x+1>0$ при всех $x \Rightarrow (x+3)(x-1)<0.$

Метод интервалов: 

О т в е т: $x \in (-3;\ 1)$.

24. $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x - 3) \geqslant 5$.

$x^2 + 3x = y;\ (y + 1)(y - 3) \geqslant 5 \Leftrightarrow y^2 + y - 3y - 3 - 5 \geqslant 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y^2 - 2y - 8 \geqslant 0 \Leftrightarrow (y - 4)(y + 2) \geqslant 0$.

Метод интервалов: 

$y \leqslant -2$ и $y \geqslant 4$.

1) $x^2 + 3x \leqslant -2 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 \leqslant 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x + 2) \leqslant 0$.

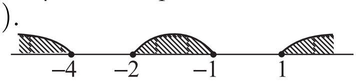
Метод интервалов: 

$x \in [-2;\ -1]$.

2) $x^2 + 3x \geqslant 4 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 \geqslant 0 \Leftrightarrow (x + 4)(x - 1) \geqslant 0$.

Метод интервалов: 

$x \in (-\infty;\ -4] \cup [1;\ \infty)$.

Объединяем решения: 

О т в е т: $x \in (-\infty;\ -4] \cup [-2;\ -1] \cup [1;\ \infty)$.

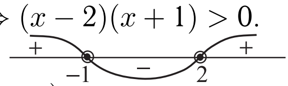
25. $(x^2 - x - 1)(x^2 - x - 7) < -5$.

$x^2 - x = y;\ (y - 1)(y - 7) < -5 \Leftrightarrow y^2 - 8y + 7 + 5 < 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y^2 - 8y + 12 < 0 \Leftrightarrow (y - 2)(y - 6) < 0$.

Метод интервалов: 

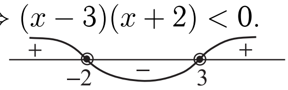
$2 < y < 6 \Leftrightarrow 2 < x^2 - x < 6$.

1) $x^2 - x - 2 > 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) > 0$.

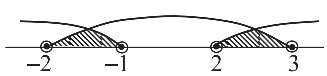
Метод интервалов: 

$x \in (-\infty;\ -1) \cup (2;\ \infty)$.

2) $x^2 - x - 6 < 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 2) < 0$.

Метод интервалов: 

$x \in (-2;\ 3)$.

Объединяем решения: 

О т в е т: $x \in (-2;\ -1) \cup (2;\ 3)$.

26. $2x^2 + 2x + 1 - \dfrac{15}{x^2 + x + 1} < 0$.

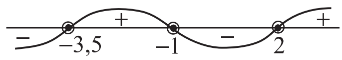
$x^2 + x = y;\ 2y + 1 - \dfrac{15}{y + 1} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{2y^2 + y + 2y + 1 - 15}{y + 1} < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{2y^2 + 3y - 14}{y + 1} < 0$.

$2y^2+3y-14=0 \Leftrightarrow y_{1,\,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{9+112}}{4}=\dfrac{-3\pm 11}{4}$;

$y_1=-\dfrac{7}{2}$; $y_2=2$.

$\dfrac{(2y+7)(y-2)}{y+1}<0$.

Метод интервалов: 

$y\in(-\infty;\ -3{,}5)\cup(-1;\,2)$.

1) $y<-3{,}5 \Rightarrow x^2+x<-3{,}5 \Rightarrow x^2+x+3{,}5<0$.

$x^2+x+3{,}5=0 \Rightarrow x_{1,\,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-14}}{2}$ — нет корней, т. к. $D<0$;

$x^2+x+3{,}5>0$ при всех $x \Rightarrow$ неравенство $x^2+x+3{,}5<0$ не имеет решений.

2) $-1<y<2 \Rightarrow -1<x^2+x<2$.

а) $x^2+x+1>0$ — выполняется при всех x, т. к. уравнение $x^2+x+1=0$ не имеет корней ($D<0$);

б) $x^2+x-2<0 \Rightarrow (x+2)(x-1)<0$;

метод интервалов: 

$x\in(-2;\,1)$.

О т в е т: $x\in(-2;\,1)$.

НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЕМ

1. $|x-3|<2$.

1) $\begin{cases} x-3\geqslant 0,\\ x-3<2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 3\\ x<5\end{cases} \Leftrightarrow 3\leqslant x<5$.

2) $\begin{cases} x-3<0,\\ 3-x<2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3,\\ x>1\end{cases} \Leftrightarrow 1<x<3$.

О т в е т: $x\in(1;\,5)$.

2. $|5-2x|>1$.

1) $\begin{cases} 5-2x\geqslant 0,\\ 5-2x>1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leqslant \dfrac{5}{2},\\ x<2\end{cases} \Leftrightarrow x<2$.

2) $\begin{cases} 5-2x<0,\\ -5+2x>1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{5}{2},\\ x>3\end{cases} \Leftrightarrow x>3$.

О т в е т: $x\in(-\infty;\,2)\cup(3;\,\infty)$.

3. $|2x^2 - 9x + 15| \geqslant 2$.

1) $\begin{cases} 2x^2 - 9x + 15 \geqslant 0, \\ 2x^2 - 9x + 15 \geqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2x^2 - 9x + 13 \geqslant 0;$

$2x^2 - 9x + 13 = 0 \Rightarrow x_{1,\,2} = \dfrac{9 \pm \sqrt{81 - 104}}{4}$ — корней нет, т. к. $D < 0$.

Поэтому $2x^2 - 9x + 13 > 0$ при всех x.

2) $\begin{cases} 2x^2 - 9x + 15 < 0, \\ -2x^2 + 9x - 15 \geqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 9x + 15 < 0, \\ 2x^2 - 9x + 15 \leqslant -2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 9x + 17 \leqslant 0$ — это неравенство не имеет решений, т. к. уравнение $2x^2 - 9x + 17 = 0$ не имеет корней и $2x^2 - 9x + 17 > 0$ при всех x.

Ответ: $x \in (-\infty; \infty)$.

4. $|x - 2| + |x + 2| \leqslant 4$.

1) $\begin{cases} x - 2 \geqslant 0, \\ x + 2 \geqslant 0, \\ x - 2 + x + 2 \leqslant 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 2, \\ x \geqslant -2, \\ x \leqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$

2) $\begin{cases} x - 2 \geqslant 0, \\ x + 2 < 0, \\ x - 2 - x - 2 \leqslant 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 2, \\ x < -2, \\ -4 \leqslant 4 \end{cases} \Leftrightarrow$ система несовместна, $\varnothing$.

3) $\begin{cases} x - 2 < 0, \\ x + 2 \geqslant 0, \\ -x + 2 + x + 2 \leqslant 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2, \\ x \geqslant -2, \\ 4 \leqslant 4 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leqslant x < 2.$

4) $\begin{cases} x - 2 < 0, \\ x + 2 < 0, \\ -x + 2 - x - 2 \leqslant 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2, \\ x < -2, \\ x \geqslant -2 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing.$

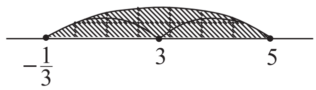
Ответ: $x \in [-2; 2]$.

5. $2|x - 1| \leqslant x + 3$.

1) $\begin{cases} x - 1 \geqslant 0, \\ 2x - 2 \geqslant x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1, \\ x \leqslant 5 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leqslant x \leqslant 5.$

2) $\begin{cases} x - 1 < 0, \\ -2x + 2 \leqslant x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1, \\ -3x \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1, \\ x \geqslant -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{3} \leqslant x < 1.$

Объединяем решения: 

О т в е т: $x \in \left[-\frac{1}{3}; 5\right]$.

6. $x^2 - |5x - 3| - x < 2$.

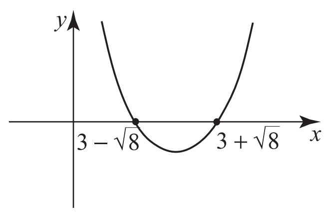
1) $\begin{cases} 5x - 3 \geqslant 0, \\ x^2 - 5x + 3 - x - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant \frac{3}{5}, \\ x^2 - 6x + 1 < 0. \end{cases}$

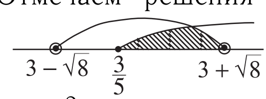
Решаем уравнение $x^2 - 6x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,\,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 1} = 3 \pm \sqrt{8}$.

Парабола $y = x^2 - 6x + 1$ пересекает ось x в т. $x_1 = 3 - \sqrt{8}$ и $x_2 = 3 + \sqrt{8}$.

$x^2 - 6x + 1 < 0$ при $3 - \sqrt{8} < x < 3 + \sqrt{8}$.

$\frac{3}{5} > 3 - \sqrt{8}? \Rightarrow \sqrt{8} > 3 - \frac{3}{5}? \Rightarrow \sqrt{8} > \frac{12}{5}? \Rightarrow 5\sqrt{8} > 12? \Rightarrow 200 > 144$, верно.

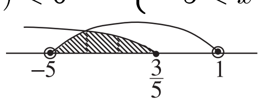


Отмечаем решения на числовой оси: 

$x \in \left[\frac{3}{5}; 3 + \sqrt{8}\right)$.

2) $\begin{cases} 5x - 3 < 0, \\ x^2 + 5x - 3 - x - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{3}{5}, \\ x^2 + 4x - 5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{3}{5}, \\ (x + 5)(x - 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{3}{5}, \\ -5 < x < 1. \end{cases}$

$x \in \left(-5; \frac{3}{5}\right)$. 

О т в е т: $x \in (-5; 3 + \sqrt{8})$.

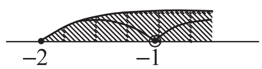
7. $\frac{2x + 5}{|x + 1|} \geqslant 1$.

1) $\begin{cases} x + 1 > 0, \\ \frac{2x + 5}{x + 1} \geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1, \\ \frac{2x + 5 - x - 1}{x + 1} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1, \\ \frac{x + 4}{x + 1} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1, \\ x \geqslant -4 \end{cases} \Leftrightarrow x > -1.$$

2) $\begin{cases} x + 1 < 0, \\ \dfrac{2x+5}{-x-1} \geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1, \\ \dfrac{2x+5+x+1}{-x-1} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1, \\ 3x + 6 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -1, \\ x \geqslant -2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leqslant x < -1.$$

Объединяем решения: 

Ответ: $x \in [-2; -1) \cup (-1; \infty)$.

8. $3|x-2| + |5x+4| \leqslant 10$.

1) $\begin{cases} x - 2 \geqslant 0, \\ 5x + 4 \geqslant 0, \\ 3x - 6 + 5x + 4 - 10 \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 2, \\ x \geqslant -\dfrac{4}{5}, \\ 8x \leqslant 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 2, \\ x \leqslant \dfrac{3}{2}. \end{cases}$

Система несовместна; $\varnothing$.

2) $\begin{cases} x - 2 \geqslant 0, \\ 5x + 4 < 0, \\ 3x - 6 - 5x - 4 - 10 \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 2, \\ x < -\dfrac{4}{5}, \\ -2x \leqslant 20. \end{cases}$

Система несовместна, $\varnothing$.

3) $\begin{cases} x - 2 < 0, \\ 5x + 4 \geqslant 0, \\ -3x + 6 + 5x + 4 \leqslant 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2, \\ x \geqslant -\dfrac{4}{5}, \\ 2x \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{4}{5} \leqslant x \leqslant 0.$

4) $\begin{cases} x - 2 < 0, \\ 5x + 4 < 0, \\ -3x + 6 - 5x - 4 \leqslant 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2, \\ x < -\dfrac{4}{5}, \\ 8x \geqslant -8 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leqslant x < -\dfrac{4}{5}.$

Ответ: $x \in [-1; 0]$.

9. $\dfrac{|x-3|}{x^2 - 5x + 6} \geqslant 2$.

1) $\begin{cases} x - 3 \geqslant 0 \\ \dfrac{x-3}{x^2-5x+6} \geqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 3, \\ \dfrac{x-3}{(x-2)(x-3)} - 2 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

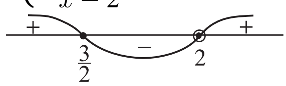
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3, \\ \dfrac{1}{x-2} - 2 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3, \\ \dfrac{1 - 2x + 4}{x-2} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3, \\ \dfrac{2x-5}{x-2} \leqslant 0. \end{cases}$$

Решаем второе неравенство методом интервалов:

$$\begin{cases} x > 3, \\ 2 < x < 2{,}5. \end{cases} \quad \varnothing.$$

2) $$\begin{cases} x - 3 < 0, \\ \dfrac{-x+3}{(x-2)(x-3)} - 2 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ \dfrac{1}{x-2} + 2 \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ \dfrac{1+2x-4}{x-2} \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ \dfrac{2x-3}{x-2} \leqslant 0. \end{cases}$$

Метод интервалов: 

$$\begin{cases} x < 3, \\ \dfrac{3}{2} \leqslant x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leqslant x < 2.$$

О т в е т: $x \in [1{,}5;\, 2)$.

10. $\dfrac{3}{|x+3|-1} \geqslant |x+2|$.

1) $$\begin{cases} x + 3 \geqslant 0, \\ x + 2 \geqslant 0, \\ \dfrac{3}{x+3-1} \geqslant x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -3, \\ x > -2, \\ \dfrac{3}{x+2} - (x+2) \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -2, \\ \dfrac{3 - x^2 - 4x - 4}{x+2} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2, \\ x^2 + 4x + 1 \leqslant 0. \end{cases}$$

$x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,\,2} = -2 \pm \sqrt{4-1} = -2 \pm \sqrt{3}$.

$x^2 + 4x + 1 \leqslant 0 \Rightarrow (x + 2 + \sqrt{3})(x + 2 - \sqrt{3}) \leqslant 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -2 - \sqrt{3} \leqslant x \leqslant -2 + \sqrt{3}$.

$x > -2 \Rightarrow -2 < x \leqslant -2 + \sqrt{3}$.

$x \in (-2;\; -2 + \sqrt{3}]$.

2) $$\begin{cases} x + 3 \geqslant 0, \\ x + 2 < 0, \\ \dfrac{3}{x+2} + (x+2) \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -3, \\ x < -2, \\ \dfrac{3 + x^2 + 4x + 4}{x+2} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leqslant x < -2, \\ x^2 + 4x + 7 \leqslant 0. \end{cases}$$

$x^2 + 4x + 7 = 0 \Rightarrow x_{1,\,2} = -2 \pm \sqrt{4-7}$ — корней нет, т. к. $D < 0$.

$x^2+4x+7>0$ при всех $x \Rightarrow$ неравенство $x^2+4x+7 \leqslant 0$ не имеет решений.

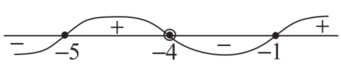
3) $\begin{cases} x+3<0, \\ x+2 \geqslant 0, \\ \dfrac{3}{-x-4} \geqslant x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-3, \\ x \geqslant -2, \\ \dfrac{3}{-x-4} \geqslant x+2. \end{cases} \quad \varnothing.$

4) $\begin{cases} x+3<0, \\ x+2<0, \\ \dfrac{3}{-x-4} \geqslant -x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-3, \\ x<-2, \\ \dfrac{3}{x+4} \leqslant x+2 \end{cases} \Leftrightarrow$

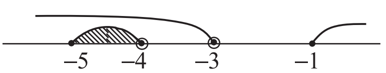
$\Leftrightarrow \begin{cases} x<-3, \\ \dfrac{3-x^2-6x-8}{x+4} \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-3, \\ \dfrac{x^2+6x+5}{x+4} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x<-3, \\ \dfrac{(x+5)(x+1)}{x+4} \geqslant 0. \end{cases}$

Метод интервалов для второго неравенства:



$\begin{cases} x<-3, \\ -5 \leqslant x < -4 \text{ и } x \geqslant -1. \end{cases}$



$x \in [-5;\ -4)$.

Ответ: $x \in [-5;\ -4) \cup (-2;\ -2+\sqrt{3}\,]$.

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

1. $\sqrt{x+3} \geqslant 2 \Leftrightarrow x+3 \geqslant 4 \Leftrightarrow x \geqslant 1$.

Ответ: $x \in [1; \infty)$.

2. $(x-1)\sqrt{x} < 0$.

Т. к. $\sqrt{x} \geqslant 0$, исходное неравенство равносильно системе:

$\begin{cases} x>0, \\ x-1<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x<1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leqslant x < 1.$

Ответ: $x \in (0; 1)$.

3. $\sqrt{x^2-9} \leqslant -1$; неравенство не имеет решений, т. к. $\sqrt{x^2-9} \geqslant 0$.

Ответ: $\varnothing$.

4. $\sqrt{x^2+x-2}<2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-2 \geqslant 0, \\ x^2+x-2<4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x-1) \geqslant 0, \\ (x+3)(x-2)<0. \end{cases}$$

Оба неравенства решаются методом интервалов:

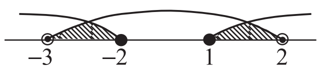
1) 

$x \in (-\infty;\ -2] \cup [1;\infty)$.

2) 

$x \in (-3;2)$.

Объединяем решения:



О т в е т: $x \in (-3;\ -2] \cup [1;2)$.

5. $\sqrt{5-x} > \sqrt{x+1} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5-x \geqslant 0, \\ x+1 \geqslant 0 \\ 5-x>x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<5, \\ x \geqslant -1, \\ x<2 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leqslant x < 2.$$

О т в е т: $x \in [-1;2)$.

6. $\sqrt{2-\sqrt{x}} > 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ 2-\sqrt{x} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ \sqrt{x} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x<1. \end{cases}$$

О т в е т: $x \in [0;1)$.

7. $\sqrt{x+5} > x$.

1) $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x+5>x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x^2-x-5<0. \end{cases}$

$x^2-x-5=0 \Rightarrow x_{1,\,2}=\dfrac{1 \pm \sqrt{1+20}}{2}=\dfrac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$.

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ \left(x-\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\right)\left(x-\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}\right)<0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ \dfrac{1-\sqrt{21}}{2}<x<\dfrac{1+\sqrt{21}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leqslant x < \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}.$$

2) $\begin{cases} x<0, \\ x+5 \geqslant 0, \\ \sqrt{x+5}>x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<0, \\ x \geqslant -5 \end{cases} \Leftrightarrow -5 \leqslant x < 0.$

Последнее неравенство справедливо при всех $x \in [-5; 0)$.

Ответ: $x \in \left[-5; \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\right)$.

8. $\sqrt[3]{x^3+4x^2-36} < x \Leftrightarrow x^3+4x^2-36 < x^3 \Leftrightarrow 4x^2-36 <$

$< 0 \Leftrightarrow x^2-9<0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3)<0 \Leftrightarrow -3<x<3.$

Ответ: $x \in (-3; 3)$.

9. $\dfrac{\sqrt{x-2}-3}{\sqrt{x-3}-2} > 0.$

1) $\begin{cases} \sqrt{x-2}-3>0, \\ \sqrt{x-3}-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2}>3, \\ \sqrt{x-3}>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2>9, \\ x-3>4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>11, \\ x>7 \end{cases} \Leftrightarrow x>11.$

2) $\begin{cases} \sqrt{x-2}-3<0, \\ \sqrt{x-3}-2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2<9, \\ x-3<4, \\ x \geqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<11, \\ x<7, \\ x\geqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3 \leqslant x < 7.$

Ответ: $x \in [3; 7) \cup (11; \infty)$.

10. $\sqrt{4-x^2} > -\sqrt{3-x}$ — это неравенство выполняется при всех допустимых значениях x, т. к. $\sqrt{4-x^2} \geqslant 0$, а $-\sqrt{3-x} \leqslant 0$.

$\begin{cases} 4-x^2 \geqslant 0, \\ 3-x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leqslant 4, \\ x \leqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ x \leqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leqslant x \leqslant 2.$

Ответ: $x \in [-2; 2]$.

11. $\sqrt{x^2+5x+7} < 3+x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+5x+7 \geqslant 0, \\ 3+x>0, \\ x^2+5x+7 < 9+6x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>-3, \\ x^2+5x+7>0 \quad \text{при всех } x, \text{ т. к. } D=25-28<0, \\ x>-2. \end{cases}$

Ответ: $x \in (-2; \infty)$.

12. $\sqrt{x^2+x-2} > x.$

1) $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x^2+x-2>x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow x>2.$

2) $\begin{cases} x < 0, \\ x^2 + x - 2 \geqslant 0, \\ \sqrt{x^2 + x - 2} > x \end{cases} \Leftrightarrow$ — это неравенство выполняется при $x < 0$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ (x+2)(x-1) \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ x \leqslant -2 \text{ и } x \geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \leqslant -2.$

Ответ: $x \in (-\infty;\ -2] \cup (2; \infty)$.

13. $\sqrt{2x+2} \geqslant x - 3$.

1) $\begin{cases} x - 3 \geqslant 0, \\ 2x + 2 \geqslant x^2 - 6x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 3, \\ x^2 - 8x + 7 \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 3, \\ (x-7)(x-1) \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 3, \\ 1 \leqslant x \leqslant 7 \end{cases} \Leftrightarrow 3 \leqslant x \leqslant 7.$

2) $\begin{cases} x - 3 < 0, \\ 2x + 2 \geqslant 0, \\ \sqrt{2x+2} \geqslant x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ x \geqslant -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leqslant x < 3.$

Ответ: $x \in [-1; 7]$.

14. $x + 2 < \sqrt{x+14}$.

1) $\begin{cases} x + 2 \geqslant 0, \\ x^2 + 4x + 4 < x + 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -2, \\ x^2 + 3x - 10 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -2, \\ (x+5)(x-2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -2, \\ -5 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leqslant x < 2.$

2) $\begin{cases} x + 2 < 0, \\ x + 14 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2, \\ x \geqslant -14 \end{cases} \Leftrightarrow -14 \leqslant x < -2.$

Ответ: $x \in [-14; 2)$.

15. $x + 4 < \sqrt{-x^2 - 8x - 12}$.

1) $\begin{cases} x + 4 \geqslant 0, \\ x^2 + 8x + 16 < -x^2 - 8x - 12 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -4, \\ 2x^2 + 16x + 28 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -4, \\ x^2 + 8x + 14 < 0. \end{cases}$

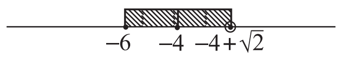
$x^2 + 8x + 14 = 0 \Rightarrow x_{1,\,2} = -4 \pm \sqrt{2}$

$\begin{cases} x \geqslant -4, \\ (x + 4 + \sqrt{2})(x + 4 - \sqrt{2}) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -4, \\ -4 - \sqrt{2} < x < -4 + \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leqslant x < -4 + \sqrt{2}.$

2) $\begin{cases} x+4<0, \\ -x^2-8x-12 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-4, \\ x^2+8x+12 \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x<-4, \\ (x+6)(x+2) \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-4, \\ -6 \leqslant x \leqslant -2 \end{cases} \Leftrightarrow -6 \leqslant x < -4.$



Ответ: $x \in [-6;\ -4+\sqrt{2}\,)$.

16. $\sqrt{x^2-3x+2} \leqslant 3x-3$.

$$\begin{cases} 3x-3 \geqslant 0, \\ x^2-3x+2 \geqslant 0, \\ x^2-3x+2 \leqslant 9x^2-18x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1, \\ (x-1)(x-2) \geqslant 0, \\ 8x^2-15x+7 \geqslant 0. \end{cases}$$

$8x^2-15x+7=0 \Rightarrow x_{1,\,2}=\dfrac{15 \pm \sqrt{225-224}}{16} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{1,\,2}=\dfrac{15 \pm 1}{16} \Rightarrow x_1=\dfrac{7}{8};\ x_2=1.$

$$\begin{cases} x \geqslant 1, \\ x \leqslant 1 \text{ и } x \geqslant 2, \\ x \leqslant \dfrac{7}{8} \text{ и } x \geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ x \geqslant 2. \end{cases}$$

Ответ: $\{1\} \cup [2;\infty)$.

17. $4(x-1) < \sqrt{(x+5)(3x+4)}$.

1) $\begin{cases} x-1 \geqslant 0, \\ 16x^2-32x+16 < 3x^2+19x+20 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1, \\ 13x^2-51x-4<0. \end{cases}$

$13x^2-51x-4=0 \Rightarrow x_{1,\,2}=\dfrac{51 \pm \sqrt{2601+208}}{26} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{1,\,2}=\dfrac{51 \pm 53}{26} \Rightarrow x_1=-\dfrac{1}{13}$ и $x_2=4$.

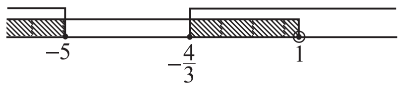
$$\begin{cases} x \geqslant 1, \\ \left(x+\dfrac{1}{13}\right)(x-4)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1, \\ -\dfrac{1}{13}<x<4 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leqslant x < 4.$$

2) $\begin{cases} x-1<0, \\ (x+5)(3x+4) \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1, \\ 3x^2+19x+20 \geqslant 0. \end{cases}$

$3x^2+19x+20=0 \Rightarrow x_{1,\,2}=\dfrac{-19 \pm \sqrt{361-240}}{6}=\dfrac{-19 \pm 11}{6} \Rightarrow$

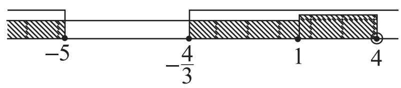
$\Rightarrow x_1=-5$ и $x_2=-\dfrac{4}{3}$.

$$\begin{cases} x < 1, \\ (x+5)\left(x+\dfrac{4}{3}\right) \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1, \\ x \leqslant -5 \text{ и } x \geqslant -\dfrac{4}{3}. \end{cases}$$



$x \in (-\infty;\ -5] \cup \left[-\dfrac{4}{3};\ 1\right)$.

Объединяем решения:



Ответ: $x \in (-\infty; 5] \cup \left[-\dfrac{4}{3}; 4\right)$.

18. $\dfrac{\sqrt{27-2x-x^2}}{3-x} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{27-2x-x^2}}{3-x} - 1 < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{27-2x-x^2}+x-3}{3-x} < 0.$

1) $\begin{cases} 3-x > 0, \\ \sqrt{27-2x-x^2}+x-3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ \sqrt{27-2x-x^2} < 3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ 27-2x-x^2 \geqslant 0, \\ 27-2x-x^2 < 9-6x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ x^2+2x-27 \leqslant 0, \\ 2x^2-4x-18 > 0. \end{cases}$$

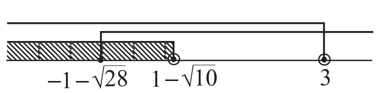
$x^2+2x-27 = 0 \Rightarrow x_{1,\,2} = -1 \pm \sqrt{1+27} = -1 \pm \sqrt{28}$.

$x^2-2x-9 = 0 \Rightarrow x_{1,\,2} = 1 \pm \sqrt{1+9} = 1 \pm \sqrt{10}$.

$$\begin{cases} x < 3, \\ (x+1+\sqrt{28})(x+1-\sqrt{28}) \leqslant 0, \\ (x-1+\sqrt{10})(x-1-\sqrt{10}) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ -1-\sqrt{28} \leqslant x \leqslant -1+\sqrt{28}, \\ x < 1-\sqrt{10} \text{ и } x > 1+\sqrt{10} \end{cases}$$

$-1+\sqrt{28} > 3$ и $1+\sqrt{10} > 3$;



$x \in [-1-\sqrt{28}\,;\ 1-\sqrt{10}\,)$.

2) $\begin{cases} 3-x<0, \\ \sqrt{27-2x-x^2}+x-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3, \\ \sqrt{27-2x-x^2}>3-x, \end{cases}$

второе неравенство выполняется при $27-2x-x^2 \geqslant 0$.

$\begin{cases} x>3, \\ 27-2x-x^2 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3, \\ x^2+2x-27 \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>3, \\ -1-\sqrt{28} \leqslant x \leqslant -1+\sqrt{28} \end{cases} \Leftrightarrow 3<x\leqslant -1+\sqrt{28}\,.$

Ответ: $x \in [-1-\sqrt{28}\,;\ 1-\sqrt{10}\,) \cup (3;\ -1+\sqrt{28}\,]$.

19. $\dfrac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x} \geqslant 2 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x}-2 \geqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2-x}+4x-3-2x}{x} \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2-x}+2x-3}{x} \geqslant 0.$

1) $\begin{cases} x>0, \\ \sqrt{2-x}+2x-3 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ \sqrt{2-x} \geqslant 3-2x. \end{cases}$

а) $\begin{cases} x>0, \\ 3-2x \geqslant 0, \\ 2-x \geqslant 9-12x+4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x \leqslant \dfrac{3}{2}, \\ 4x^2-11x+7 \leqslant 0. \end{cases}$

$4x^2-11x+7=0 \Rightarrow x_{1,\,2}=\dfrac{11\pm\sqrt{121-112}}{8}=\dfrac{11\pm 3}{8} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1=1$ и $x_2=\dfrac{7}{4}$.

$\begin{cases} 0<x\leqslant \dfrac{3}{2}, \\ 1\leqslant x\leqslant \dfrac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow 1\leqslant x\leqslant 1{,}5.$

б) $\begin{cases} x>0, \\ 3-2x<0, \\ 2-x\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x>\dfrac{3}{2}, \\ x\leqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1{,}5<x\leqslant 2.$

Объединяя, получаем $x \in [1;\,2]$.

2) $\begin{cases} x<0, \\ \sqrt{2-x}+2x-3 \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<0, \\ \sqrt{2-x} \leqslant 3-2x, \\ 3-2x \geqslant 0, \\ 2-x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ 2 - x \leqslant 9 - 12x + 4x^2, \\ x \leqslant \dfrac{3}{2}, \\ x \leqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ 4x^2 - 11x + 7 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ x \leqslant 1 \text{ и } x \geqslant \dfrac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x < 0.$$

Ответ: $x \in (-\infty; 0) \cup [1; 2]$.

20. $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+2} > \sqrt{2x+4}$.

$$\begin{cases} x + 3 \geqslant 0, \\ x + 2 \geqslant 0, \\ 2x + 4 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -3, \\ x \geqslant -2, \\ x \geqslant -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geqslant -2.$$

Возводим обе части неравенства в квадрат:

$x + 3 + 2\sqrt{x+3}\sqrt{x+2} + x + 2 > 2x + 4$

$2\sqrt{(x+3)(x+2)} > -1$ — неравенство выполняется при всех допустимых x.

Ответ: $x \in [-2; \infty)$.

21. $\sqrt{4 - \sqrt{1-x}} > \sqrt{2-x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x \geqslant 0, \\ 2 - x \geqslant 0, \\ 4 - \sqrt{1-x} > 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 1, \\ x \leqslant 2, \\ \sqrt{1-x} < x + 2, \\ x + 2 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

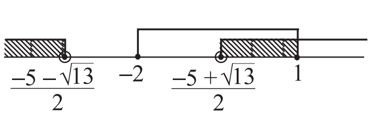
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 1, \\ x \geqslant -2, \\ 1 - x < x^2 + 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 1, \\ x^2 + 5x + 3 > 0. \end{cases}$$

$x^2 + 5x + 3 = 0 \Rightarrow x_{1,\,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25-12}}{2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$.

$$\begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 1, \\ x < \dfrac{-5 - \sqrt{13}}{2} \text{ и } x > \dfrac{-5 + \sqrt{13}}{2}. \end{cases}$$

$\dfrac{-5 - \sqrt{13}}{2} < -2? \Rightarrow \dfrac{5 + \sqrt{13}}{2} > 2? \Rightarrow 5 + \sqrt{13} > 4? \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{13} > -1$ — верно.

$\dfrac{-5 + \sqrt{13}}{2} > -2? \Rightarrow -5 + \sqrt{13} > -4 \Rightarrow \sqrt{13} > 1$ — верно.



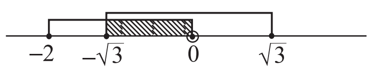
Ответ: $x \in \left(\dfrac{-5+\sqrt{13}}{2};\ 1\right]$.

22. $\sqrt{4-x^2}+\dfrac{|x|}{x} \geqslant 0.$

1) $\begin{cases} x>0, \\ 4-x^2 \geqslant 0, \\ \sqrt{4-x^2}+1 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ -2 \leqslant x \leqslant 2, \end{cases} \Leftrightarrow 0<x \leqslant 2.$

2) $\begin{cases} x<0, \\ 4-x^2 \geqslant 0, \\ \sqrt{4-x^2}-1 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<0, \\ -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ 4-x^2 \geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leqslant x<0, \\ x^2 \leqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leqslant x<0, \\ -\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{3}. \end{cases}$



Ответ: $x \in [-\sqrt{3};0) \cup (0;2]$.

23. $\dfrac{4}{\sqrt{2-x}}-\sqrt{2-x}<2 \Leftrightarrow \dfrac{4-2+x}{\sqrt{2-x}}<2 \Leftrightarrow \dfrac{2+x-2\sqrt{2-x}}{\sqrt{2-x}}<$

$<0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x>0, \\ 2+x-2\sqrt{2-x}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2, \\ 2\sqrt{2-x}>2+x. \end{cases}$

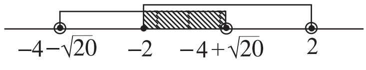
1) $\begin{cases} x<2, \\ 2+x \geqslant 0, \\ 4(2-x)>4+4x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2, \\ x \geqslant -2, \\ x^2+8x-4<0. \end{cases}$

$x^2+8x-4=0 \Rightarrow x_{1,\,2}=-4 \pm \sqrt{16+4}=-4 \pm \sqrt{20}.$

$\begin{cases} -2 \leqslant x<2, \\ -4-\sqrt{20}<x<-4+\sqrt{20}. \end{cases}$

$-4+\sqrt{20}<2? \Rightarrow \sqrt{20}<6? \Rightarrow 20<36$ — верно.

$x \in [-2;\ -4+\sqrt{20})$.



2) $\begin{cases} x<2, \\ 2+x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2, \\ x<-2 \end{cases} \Leftrightarrow x<-2.$

Неравенство $2\sqrt{2-x}>2+x$ выполняется, т. к. $\sqrt{2-x}>0$, а $2+x<0$.

Ответ: $x \in (-\infty;\ \sqrt{20}-4)$.

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

1. $\left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{2x}{3}} > 25 \Leftrightarrow 5^{\frac{2x}{3}} > 5^2 \Leftrightarrow \frac{2x}{3} > 2 \Leftrightarrow 2x > 6 \Leftrightarrow x > 3.$

Ответ: $x \in (3;\ \infty)$.

2. $5^{\frac{x+1}{3}} \geqslant \frac{1}{\sqrt[3]{5}} \Leftrightarrow 5^{\frac{x+1}{3}} \geqslant 5^{-\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \frac{x+1}{3} \geqslant -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x+1 \geqslant -1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \geqslant -2.$

Ответ: $x \in [-2;\ \infty)$.

3. $3^{\frac{2x+1}{5}} < \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \Leftrightarrow 3^{\frac{2x+1}{5}} < 3^{-\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \frac{2x+1}{5} < -\frac{1}{3} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 6x + 3 < -5 \Leftrightarrow 6x < -8 \Leftrightarrow x < -\frac{4}{3}.$

Ответ: $x \in \left(-\infty;\ -\frac{4}{3}\right)$.

4. $\left(\frac{1}{49}\right)^{-\frac{x}{2}} \leqslant 7 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{7}\right)^{-x} \leqslant \left(\frac{1}{7}\right)^{-1} \Leftrightarrow -x \geqslant -1 \Leftrightarrow x \leqslant 1.$

Ответ: $x \in (-\infty;\ 1]$.

5. $250 \cdot 5^{3-x} - 2 \cdot 5^{x-3} > 0 \Leftrightarrow 250 \cdot \frac{1}{5^{x-3}} - 2 \cdot 5^{x-3} > 0;$

$5^{x-3} = y > 0.$

$\frac{125}{y} - y > 0 \Leftrightarrow \frac{125 - y^2}{y} > 0 \Leftrightarrow 125 - y^2 > 0 \Leftrightarrow y^2 < 125 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 0 < y < 5\sqrt{5}.$

$5^{x-3} < 5^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x - 3 < \frac{3}{2} \Leftrightarrow x < 4{,}5.$

Ответ: $x \in (-\infty;\ 4{,}5)$.

6. $\frac{440}{6^x} - 2 \cdot 6^x > 8 \cdot 6^{-x} \Leftrightarrow \frac{220}{6^x} - 6^x > \frac{4}{6^x};\ 6^x = y > 0.$

$\frac{220}{y} - y > \frac{4}{y} \Leftrightarrow \frac{216}{y} - y > 0 \Leftrightarrow \frac{216 - y^2}{y} > 0 \Leftrightarrow 216 - y^2 > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y^2 < 216 \Leftrightarrow 0 < y < 6\sqrt{6}.$

$6^x < 6^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}.$

Ответ: $x \in \left(-\infty;\ \frac{3}{2}\right)$.

7. $2^{x+3} + 3 \cdot 5^x < 3 \cdot 2^x + 5^{x+1} \Leftrightarrow 8 \cdot 2^x + 3 \cdot 5^x <$
$< 3 \cdot 2^x + 5 \cdot 5^x \Leftrightarrow 5 \cdot 2^x < 2 \cdot 5^x \Leftrightarrow 2^{x-1} < 5^{x-1} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{x-1} < 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{x-1} < \left(\frac{2}{5}\right)^{0} \Leftrightarrow x-1>0 \Leftrightarrow x>1.$

Ответ: $x \in (1; \infty)$.

8. $5^{x+1} - 3^{x+2} < 2\cdot 5^x - 2\cdot 3^{x-1} \Leftrightarrow 5\cdot 5^x - 9\cdot 3^x <$
$< 2\cdot 5^x - \frac{2}{3}\cdot 3^x \Leftrightarrow 3\cdot 5^x < \frac{25}{3}\cdot 3^x \Leftrightarrow 5^{x-2} < 3^{x-2} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{x-2} < 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{x-2} < \left(\frac{5}{3}\right)^{0} \Leftrightarrow x-2<0 \Leftrightarrow x<2.$

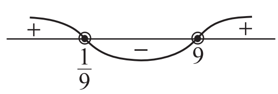
Ответ: $x \in (-\infty; 2)$.

9. $2^{2x} - 3\cdot 2^x + 2 \leqslant 0$; $2^x = y > 0$.
$y^2 - 3y + 2 \leqslant 0 \Leftrightarrow (y-1)(y-2) \leqslant 0 \Leftrightarrow 1 \leqslant y \leqslant 2.$
$2^0 \leqslant 2^x \leqslant 2^1 \Rightarrow 0 \leqslant x \leqslant 1.$

Ответ: $x \in [0; 1]$.

10. $3^{2x+2} - 3^{x+4} < 3^x - 9 \Leftrightarrow 3^{2x}\cdot 9 - 3^x\cdot 81 - 3^x + 9 < 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 9\cdot 3^{2x} - 82\cdot 3^x + 9 < 0$; $3^x = y > 0$.
$9y^2 - 82y + 9 < 0$;
$9y^2 - 82y + 9 = 0 \Rightarrow y_{1,\,2} = \frac{41 \pm \sqrt{1681-81}}{9} \Rightarrow$
$\Rightarrow y_{1,\,2} = \frac{41 \pm 40}{9} \Rightarrow y_1 = \frac{1}{9}$ и $y_2 = 9$.

$9\left(y - \frac{1}{9}\right)(y-9) < 0.$

Метод интервалов: 

$\frac{1}{9} < y < 9 \Rightarrow \frac{1}{9} < 3^x < 9 \Rightarrow 3^{-2} < 3^x < 3^2 \Rightarrow -2 < x < 2.$

Ответ: $x \in (-2; 2)$.

11. $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+4x} \geqslant \left(\frac{8}{27}\right)^{x+2} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+4x} \geqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{3x+6} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 + 4x \leqslant 3x + 6 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 \leqslant 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-2) \leqslant 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -3 \leqslant x \leqslant 2.$

Ответ: $x \in [-3; 2]$.

12. $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2x-7}{x+1}} \geqslant \frac{5}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2x-7}{x+1}} \geqslant \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} \Leftrightarrow \frac{2x-7}{x+1} \leqslant -1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{2x-7+x+1}{x+1} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{3x-6}{x+1} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x+1} \leqslant 0.$

Метод интервалов: 

Ответ: $x \in (-1; 2]$.

13. $5^{\sqrt{x-2}} > 5^{1-\sqrt{x-2}} + 4 \Leftrightarrow 5^{\sqrt{x-2}} > \dfrac{5}{5^{\sqrt{x-2}}} + 4;$

$5^{\sqrt{x-2}} = y > 0;\ x \geqslant 2.$

$y > \dfrac{5}{y} + 4 \Leftrightarrow y - \dfrac{5}{y} - 4 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{y^2 - 4y - 5}{y} > 0 \Leftrightarrow y^2 - 4y - 5 >$
$> 0 \Leftrightarrow (y-5)(y+1) > 0.$

Метод интервалов: 

$y < -1$ и $y > 5$, но $y > 0 \Rightarrow y > 5.$

$5^{\sqrt{x-2}} > 5 \Rightarrow \sqrt{x-2} > 1 \Rightarrow x - 2 > 1 \Rightarrow x > 3.$

Ответ: $x \in (3; \infty).$

14. $2^{x-1} > \left(\dfrac{1}{16}\right)^{\frac{1}{x}};\ x \neq 0.$

$2^{x-1} > 2^{-\frac{4}{x}} \Leftrightarrow x - 1 > -\dfrac{4}{x} \Leftrightarrow x + \dfrac{4}{x} - 1 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - x + 4}{x} > 0.$

$x^2 - x + 4 > 0$ при всех x, т. к. $D = 1 - 16 < 0.$

Следовательно, $x > 0.$

Ответ: $x \in (0; \infty).$

15. $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{-9x^2-8x+3} < 7^{-7x^2} \Leftrightarrow 7^{9x^2+8x-3} < 7^{-7x^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9x^2 + 8x - 3 < -7x^2 \Leftrightarrow 16x^2 + 8x - 3 < 0.$

$16x^2 + 8x - 3 = 0 \Rightarrow x_{1,\,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{16} = \dfrac{-4 \pm 8}{16} \Rightarrow$
$\Rightarrow x_1 = -\dfrac{3}{4};\ x_2 = \dfrac{1}{4}.$

$16\left(x + \dfrac{3}{4}\right)\left(x - \dfrac{1}{4}\right) < 0 \Leftrightarrow \left(x + \dfrac{3}{4}\right)\left(x - \dfrac{1}{4}\right) < 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -\dfrac{3}{4} < x < \dfrac{1}{4}.$

Ответ: $x \in \left(-\dfrac{3}{4}; \dfrac{1}{4}\right).$

16. $2^{\sqrt{x^2-3x+3}} > 2^{\sqrt{x}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 3 \geqslant 0, \\ x \geqslant 0, \\ \sqrt{x^2 - 3x + 3} > \sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x^2 - 3x + 3 > x. \end{cases}$$

Т. к. $x \geqslant 0$ и $x^2 - 3x + 3 > x$, то $x^2 - 3x + 3 > 0.$

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0, \\ x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-3) > 0, \\ x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \text{ и } x > 3, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$$

Ответ: $x \in [0; 1) \cup (3; \infty).$

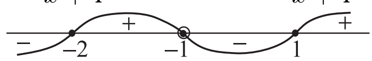
17. $(\sqrt{5}+2)^{x-1} \geqslant (\sqrt{5}-2)^{\frac{x-1}{x+1}}$; $x \neq -1$.

$(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2) = 5-4 = 1 \Rightarrow \sqrt{5}-2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}+2}$.

$$(\sqrt{5}+2)^{x-1} \geqslant \left(\frac{1}{\sqrt{5}+2}\right)^{\frac{x-1}{x+1}} \Leftrightarrow (\sqrt{5}+2)^{x-1} \geqslant$$

$$\geqslant (\sqrt{5}+2)^{\frac{x-1}{x+1}} \Leftrightarrow x-1 \geqslant -\frac{x-1}{x+1} \Leftrightarrow x-1+\frac{x-1}{x+1} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-1+x-1}{x+1} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x-2}{x+1} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(x+2)(x-1)}{x+1} \geqslant 0.$$

Метод интервалов: 

Ответ: $x \in [-2;\ -1) \cup [1;\ \infty)$.

18. $3^{72}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}} > 1$; $x \geqslant 0$.

$$3^{72} \cdot 3^{-x} \cdot 3^{-\sqrt{x}} > 3^0 \Leftrightarrow 3^{72-x-\sqrt{x}} > 3^0 \Leftrightarrow 72-x-\sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} < 72-x.$$

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ 72-x > 0, \\ x < (72-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant x < 72, \\ x < 5184-144x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant x < 72, \\ x^2-145x+5184 > 0. \end{cases}$$

$$x^2-145x+5184 > 0 \Rightarrow x_{1,\,2} = \frac{145 \pm \sqrt{21\,025-20\,736}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,\,2} = \frac{145 \pm 17}{2} \Rightarrow x_1 = 64;\ x_2 = 81.$$

$$\begin{cases} 0 \leqslant x < 72, \\ (x-64)(x-81) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant x < 72, \\ x < 64 \text{ и } x > 81. \end{cases}$$

Ответ: $x \in [0;\ 64)$.

19. $\dfrac{11 \cdot 3^{x-1}-31}{4 \cdot 9^x - 11 \cdot 3^{x-1} - 5} \geqslant 5 \Leftrightarrow \dfrac{\frac{11}{3} \cdot 3^x - 31}{4 \cdot (3^x)^2 - \frac{11}{3} \cdot 3^x - 5} \geqslant 5$;

$3^x = y > 0$.

$$\frac{\frac{11}{3}\,y-31}{4y^2-\frac{11}{3}\,y-5} \geqslant 5 \Leftrightarrow \frac{11y-93}{12y^2-11y-15} \geqslant 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{11y-93}{12y^2-11y-15} - 5 \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{11y-93-60y^2+55y+75}{12y^2-11y-15} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-60y^2+66y-18}{12y^2-11y-15} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{10y^2-11y+3}{12y^2-11y-15} \leqslant 0.$$

$$10y^2 - 11y + 3 = 0 \Rightarrow y_{1,\,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 120}}{20} \Rightarrow$$

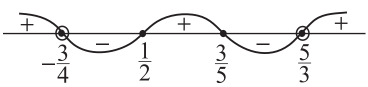
$$\Rightarrow y_{1,\,2} = \frac{11 \pm 1}{20} \Rightarrow y_1 = \frac{1}{2} \text{ и } y_2 = \frac{3}{5}.$$

$$12y^2 - 11y - 15 = 0 \Rightarrow y_{1,\,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 + 720}}{24} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{1,\,2} = \frac{11 \pm 29}{24} \Rightarrow y_1 = -\frac{3}{4} \text{ и } y_2 = \frac{5}{3}.$$

$$\frac{10\left(y - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{3}{5}\right)}{12\left(y + \frac{3}{4}\right)\left(y - \frac{5}{3}\right)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{\left(y - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{3}{5}\right)}{\left(y + \frac{3}{4}\right)\left(y - \frac{5}{3}\right)} \leqslant 0.$$

$y > 0$.

Метод интервалов: 

$$y \in \left(0; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{5}; \frac{5}{3}\right).$$

1) $3^x \leqslant \dfrac{1}{2} \Rightarrow x \leqslant \log_3 \dfrac{1}{2} = -\log_3 2.$

2) $\dfrac{3}{5} \leqslant 3^x < \dfrac{5}{3} \Rightarrow \log_3 \dfrac{3}{5} \leqslant x < \log_3 \dfrac{5}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - \log_3 5 \leqslant x < \log_3 5 - 1.$

О т в е т: $x \in (-\infty;\ -\log_3 2] \cup [1 - \log_3 5;\ \log_3 5 - 1).$

20. $9^{\sqrt{x^2-3}} + 3 < 3^{\sqrt{x^2-3}-1} \cdot 28 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (3^{\sqrt{x^2-3}})^2 + 3 < \dfrac{28}{3} \times 3^{\sqrt{x^2-3}};$

$3^{\sqrt{x^2-3}} = y > 0;\ x^2 \geqslant 3.$

$y^2 - \dfrac{28}{3}\, y + 3 < 0 \Leftrightarrow 3y^2 - 28y + 9 < 0.$

$$3y^2 - 28y + 9 = 0 \Rightarrow y_{1,\,2} = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 27}}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{1,\,2} = \frac{14 \pm 13}{3} \Rightarrow y_1 = \frac{1}{3} \text{ и } y_2 = 9.$$

$3\left(y - \dfrac{1}{3}\right)(y - 9) < 0 \Rightarrow \dfrac{1}{3} < y < 9.$

$$3^{-1} < 3^{\sqrt{x^2-3}} < 3^2 \Rightarrow 0 \leqslant \sqrt{x^2 - 3} < 2 \Rightarrow 0 \leqslant x^2 - 3 < 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \leqslant x^2 < 7 \Rightarrow \sqrt{3} \leqslant |x| < \sqrt{7}.$$

1) $x > 0 \Rightarrow \sqrt{3} \leqslant x < \sqrt{7}.$

2) $x < 0 \Rightarrow \sqrt{3} \leqslant -x < \sqrt{7} \Rightarrow -\sqrt{7} < x \leqslant -\sqrt{3}.$

О т в е т: $x \in (-\sqrt{7};\ -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3};\ \sqrt{7}).$

21. $5^{2x-\frac{1}{3}x^2} < 5^{2-2x}(\sqrt[3]{5})^{x^2} + 24 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5^{2x-\frac{1}{3}x^2} < 25 \cdot 5^{-2x+\frac{x^2}{3}} + 24 \Leftrightarrow 5^{-2x+\frac{x^2}{3}} - 25 \cdot \dfrac{1}{5^{2x-\frac{x^2}{3}}} - 24 < 0;$

$5^{2x-\frac{x^2}{3}} = y > 0.$

$y - \dfrac{25}{y} - 24 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{y^2 - 24y - 25}{y} < 0 \Leftrightarrow y^2 - 24y - 25 < 0$ (т. к. $y > 0$) $\Leftrightarrow (y-25)(y+1) < 0 \Leftrightarrow -1 < y < 25;$

$y > 0 \Rightarrow 0 < y < 25.$

$5^{2x-\frac{x^2}{3}} < 5^2 \Rightarrow 2x - \dfrac{x^2}{3} < 2 \Rightarrow \dfrac{x^2}{3} - 2x + 2 > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 6x + 6 > 0.$

$x^2 - 6x + 6 = 0 \Rightarrow x_{1,\,2} = 3 \pm \sqrt{9-6} = 3 \pm \sqrt{3}\,.$

$(x - 3 - \sqrt{3})(x - 3 + \sqrt{3}) > 0 \Rightarrow x < 3 - \sqrt{3}$ и $x > 3 + \sqrt{3}\,.$

Ответ: $x \in (-\infty; 3-\sqrt{3}) \cup (3+\sqrt{3}; \infty)$.

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

1. $\log_5(3-8x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-8x>0, \\ \log_5(3-8x) > \log_5 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-8x>0, \\ 3-8x>1 \end{cases} \Leftrightarrow 3-8x>1 \Leftrightarrow 8x<2 \Leftrightarrow x<\dfrac{1}{4}.$

Ответ: $x \in \left(-\infty; \dfrac{1}{4}\right)$.

2. $\log_{\frac{1}{3}}(7-x) > -2 \Leftrightarrow \begin{cases} 7-x>0; \\ \log_{\frac{1}{3}}(7-x) > \log_{\frac{1}{3}} 9 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x<7, \\ 7-x<9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<7, \\ x>-2 \end{cases} \Leftrightarrow -2<x<7.$

Ответ: $x \in (-2; 7)$.

3. $\lg(4x-1) \leqslant 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-1>0, \\ \lg(4x-1) \leqslant \lg 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{1}{4}, \\ 4x-1 \leqslant 10 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{1}{4}, \\ x \leqslant \dfrac{11}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{4} < x \leqslant \dfrac{11}{4}.$

Ответ: $x \in \left(\dfrac{1}{4}; \dfrac{11}{4}\right]$.

4. $\log_3(3x-1) < \log_3(2x+3) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1>0, \\ 2x+3>0, \\ 3x-1<2x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{1}{3}, \\ x>-\dfrac{3}{2}, \\ x<4 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3}<x<4.$$

Ответ: $x \in \left(\frac{1}{3}; 4\right)$.

5. $\log_{\frac{1}{7}}(4x-3) \geqslant \log_{\frac{1}{7}}(x+3) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3>0, \\ x+3>0, \\ 4x-3 \leqslant x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{3}{4}, \\ x>-3, \\ 3x \leqslant 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{3}{4}, \\ x \leqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{4}<x \leqslant 2.$$

Ответ: $x \in \left(\frac{3}{4}; 2\right]$.

6. $\log_2(2x-1) > \log_2(x+1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1>0, \\ x+1>0, \\ 2x-1>x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{1}{2}, \\ x>-1, \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow x>2.$$

Ответ: $x \in (2; \infty)$.

7. $\log_{\frac{3}{2}}\left(3+\frac{x}{2}\right) - \log_{\frac{3}{2}} 4 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3+\dfrac{x}{2}>0, \\ \log_{\frac{3}{2}} \dfrac{6+x}{8} < \log_{\frac{3}{2}} 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>-6, \\ 6+x<8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-6, \\ x<2 \end{cases} \Leftrightarrow -6<x<2.$$

Ответ: $x \in (-6; 2)$.

8. $\lg 2^{3x-1} - \lg 2^{x+2} < \lg 4 \Leftrightarrow (3x-1)\lg 2 - (x+2)\lg 2 < 2\lg 2 \Leftrightarrow \lg 2(3x-1-x-2) < 2\lg 2 \Leftrightarrow 2x-3<2$ (т. к. $\lg 2 > 0$) $\Leftrightarrow 2x<5 \Leftrightarrow x<2{,}5$.

Ответ: $x \in (-\infty; 2{,}5)$.

9. $\lg 3^{8-x} + \lg 5 > \lg 27 + \lg 15 \Leftrightarrow \lg(5 \cdot 3^{8-x}) > \lg(27 \cdot 15) \Leftrightarrow 5 \cdot 3^{8-x} > 27 \cdot 15 \Leftrightarrow 3^{8-x} > 27 \cdot 3 \Leftrightarrow 3^{8-x} > 3^4 \Leftrightarrow 8-x>4 \Leftrightarrow x<4$.

Ответ: $x \in (-\infty; 4)$.

10. $(x+1)\log_{0,7}3 - \log_{0,7}27 > 0 \Leftrightarrow \log_{0,7}3^{x+1} - \log_{0,7}27 > 0 \Leftrightarrow \log_{0,7}\dfrac{3^{x+1}}{27} > \log_{0,7}1 \Leftrightarrow \dfrac{3^{x+1}}{27} < 1 \Leftrightarrow 3^{x+1} < 27 \Leftrightarrow 3^{x+1} < 3^3 \Leftrightarrow x+1 < 3 \Leftrightarrow x < 2.$

Ответ: $x \in (-\infty; 2)$.

11. $\log_{\sqrt{3}}(12-x^2) > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 12 - x^2 > 0, \\ \log_{\sqrt{3}}(12-x^2) > 2\log_{\sqrt{3}}\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 < 12, \\ 12 - x^2 > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\sqrt{3} < x < 2\sqrt{3}, \\ -3 < x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < x < 3.$

Ответ: $x \in (-3; 3)$.

12. $8^{\log_8(3-2x)} > 3 \Leftrightarrow 3 - 2x > 3 \Leftrightarrow 2x < 0 \Leftrightarrow x < 0.$

Ответ: $x \in (-\infty; 0)$.

13. $5^{\log_5(2x-1)} < 7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 > 0, \\ 2x - 1 < 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{1}{2}, \\ x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} < x < 4.$

Ответ: $x \in \left(\dfrac{1}{2}; 4\right)$.

14. $\log_2\log_{\sqrt{5}}(x-1) < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ \log_{\sqrt{5}}(x-1) > 0, \\ \log_2\log_{\sqrt{5}}(x-1) < \log_2 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ \log_{\sqrt{5}}(x-1) > \log_{\sqrt{5}} 1, \\ \log_{\sqrt{5}}(x-1) < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x > 2, \\ x - 1 < 5 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x < 6.$

Ответ: $x \in (2; 6)$.

15. $\log_4\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(2-x) < \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x > 0, \\ \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(2-x) > 0, \\ \log_4\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(2-x) < \dfrac{1}{2}\log_4 4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 2, \\ 2 - x < 1, \\ \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(2-x) < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2, \\ x > 1, \\ 2 - x > \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2, \\ x > 1, \\ x < 1\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 < x < 1\dfrac{2}{3}.$

Ответ: $x \in \left(1; 1\dfrac{2}{3}\right)$.

16. $\log_{\frac{1}{3}}(x+2) - \log_9(x+2) > -\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2>0, \\ \log_{\frac{1}{3}}(x+2) - \dfrac{\log_{\frac{1}{3}}(x+2)}{\log_{\frac{1}{3}} 9} > -\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>-2, \\ \log_{\frac{1}{3}}(x+2)\left(1+\dfrac{1}{2}\right) > -\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2, \\ \log_{\frac{1}{3}}(x+2) > -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>-2, \\ \log_{\frac{1}{3}}(x+2) > \log_{\frac{1}{3}} 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2, \\ x+2<3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2, \\ x<1. \end{cases}$$

Ответ: $x \in (-2;\, 1)$.

17. $\log_{x+1}(5-x) > 1$.

1) $\begin{cases} 5-x>0, \\ x+1>1, \\ \log_{x+1}(5-x) > \log_{x+1}(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<5, \\ x>0, \\ 5-x>x+1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x<5, \\ x>0, \\ x<2 \end{cases} \Leftrightarrow 0<x<2.$$

2) $\begin{cases} 5-x>0, \\ 0<x+1<1, \\ \log_{x+1}(5-x) > \log_{x+1}(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<5, \\ -1<x<0, \\ 5-x<x+1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1<x<0, \\ x>2. \end{cases}$$

Система несовместна и не имеет решений.

Ответ: $x \in (0;\, 2)$.

18. $\log_{0,5} 2^{\frac{1}{x+1}} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \neq 0, \\ \log_{0,5} 2^{\frac{1}{x+1}} > \log_{0,5} 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1, \\ 2^{\frac{1}{x+1}} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1, \\ \dfrac{1}{x+1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x+1<0 \Leftrightarrow x<-1.$$

Ответ: $x \in (-\infty;\, -1)$.

19. $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{6x+1}{5x^2+2} \leqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{6x+1}{5x^2+2} > 0, \\ \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{6x+1}{5x^2+2} \leqslant \log_{\frac{1}{2}} 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x+1>0, \\ \dfrac{6x+1}{5x^2+2} \geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{1}{6}, \\ \dfrac{6x+1-5x^2-2}{5x^2+2} \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{1}{6}, \\ -5x^2+6x-1 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{1}{6}, \\ 5x^2-6x+1 \leqslant 0. \end{cases}$$

$5x^2 - 6x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,\,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-5}}{5} = \dfrac{3 \pm 2}{5} \Rightarrow x_1 = \dfrac{1}{5}$ и $x_2 = 1$.

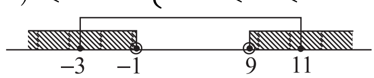
$$\begin{cases} x > -\dfrac{1}{6}, \\ 5\left(x - \dfrac{1}{5}\right)(x-1) \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{1}{6}, \\ \dfrac{1}{5} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{5} \leqslant x \leqslant 1.$$

О т в е т: $x \in \left[\dfrac{1}{5};\, 1\right]$.

20. $\log_{12}(6x^2 - 48x - 54) \leqslant 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2-48x-54>0, \\ \log_{12}(6x^2-48x-54) \leqslant \log_{12} 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-8x-9>0, \\ x^2-8x-9 \leqslant 24 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-9)(x+1)>0, \\ (x-11)(x+3) \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-1 \text{ и } x>9, \\ -3 \leqslant x \leqslant 11. \end{cases}$$

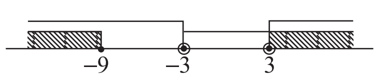


О т в е т: $x \in [-3;\; -1) \cup (9;\, 11]$.

21. $\log_{\frac{1}{4}} \dfrac{x-3}{x+3} \geqslant -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-3}{x+3} > 0, \\ \log_{\frac{1}{4}} \dfrac{x-3}{x+3} \geqslant -\dfrac{1}{2} \log_{\frac{1}{4}} \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x<-3 \text{ и } x>3, \\ \dfrac{x-3}{x+3} \leqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-3 \text{ и } x>3, \\ \dfrac{x-3-2x-6}{x+3} \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x<-3 \text{ и } x>3, \\ \dfrac{x+9}{x+3} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-3 \text{ и } x>3, \\ x \leqslant -9 \text{ и } x>-3. \end{cases}$$



О т в е т: $x \in (-\infty;\; -9] \cup (3;\, \infty)$.

22. $\log_{\frac{8}{3}} \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x - 6) \geqslant 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 6 > 0, \\ \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x - 6) > 0, \\ \log_{\frac{8}{3}} \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x - 6) \geqslant \log_{\frac{8}{3}} 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x+2) > 0, \\ x^2 - x - 6 < 1, \\ \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x - 6) \geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

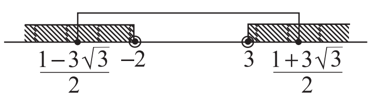
$$\begin{cases} x < -2 \text{ и } x > 3, \\ x^2 - x - 6 < 1, \\ x^2 - x - 6 \leqslant \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \text{ и } x > 3, \\ 2x^2 - 2x - 13 \leqslant 0. \end{cases}$$

$$2x^2 - 2x - 13 = 0 \Rightarrow x_{1,\,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 26}}{2} = \frac{1 \pm 3\sqrt{3}}{2}.$$

$$\begin{cases} x < -2 \text{ и } x > 3, \\ \dfrac{1 - 3\sqrt{3}}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{1 + 3\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

$\dfrac{1 - 3\sqrt{3}}{2} < -2? \Rightarrow 1 - 3\sqrt{3} < -4? \Rightarrow 3\sqrt{3} > 5? \Rightarrow 27 > 25$ — верно.

$\dfrac{1 + 3\sqrt{3}}{2} > 3? \Rightarrow 1 + 3\sqrt{3} > 6 \Rightarrow 3\sqrt{3} > 5 \Rightarrow 27 > 25$ — верно.



О т в е т: $x \in \left[\dfrac{1 - 3\sqrt{3}}{2};\ -2\right) \cup \left(3;\ \dfrac{1 + 3\sqrt{3}}{2}\right]$.

23. $\log_3(x^2 - 2) < \log_3\left(\dfrac{3}{2}|x| - 1\right)$.

$$1)\ \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x^2 - 2 > 0, \\ \dfrac{3}{2}x - 1 > 0, \\ x^2 - 2 < \dfrac{3}{2}x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x > \sqrt{2}, \\ x > \dfrac{2}{3}, \\ x^2 - \dfrac{3}{2}x - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \sqrt{2}, \\ 2x^2 - 3x - 2 < 0. \end{cases}$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow x_{1,\,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4}.$$

$$\begin{cases} x > \sqrt{2}, \\ (x-2)\left(x + \dfrac{1}{2}\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \sqrt{2}, \\ -\dfrac{1}{2} < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{2} < x < 2.$$

2) $\begin{cases} x < 0, \\ x^2 - 2 > 0, \\ -\dfrac{3}{2}x - 1 > 0, \\ x^2 - 2 < -\dfrac{3}{2}x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ x < -\sqrt{2}\,, \\ x < -\dfrac{2}{3}, \\ x^2 + \dfrac{3}{2}x - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -\sqrt{2}\,, \\ 2x^2 + 3x - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\sqrt{2}\,, \\ (x+2)\left(x - \dfrac{1}{2}\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -\sqrt{2}\,, \\ -2 < x < \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x < \sqrt{2}\,.$

О т в е т: $x \in (-2;\ -\sqrt{2}\,) \cup (\sqrt{2}\,; 2)$.

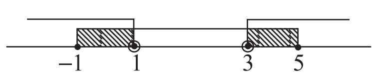
24. $\log_{\frac{1}{2}}(1 + x - \sqrt{x^2 - 4}\,) \leqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 \geqslant 0, \\ 1 + x - \sqrt{x^2 - 4} > 0, \\ 1 + x - \sqrt{x^2 - 4} \geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant -2 \text{ и } x \geqslant 2, \\ x \geqslant \sqrt{x^2 - 4}\,, \\ x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 2, \\ x^2 \geqslant x^2 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 2, \\ 0 \geqslant -4 \end{cases} \Leftrightarrow x \geqslant 2.$

О т в е т: $x \in [2; \infty)$.

25. $\log_{\sin\frac{\pi}{6}}(x^2 - 4x + 3) \geqslant -3 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4x + 3) \geqslant \log_{\frac{1}{2}} 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0, \\ x^2 - 4x + 3 \leqslant 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-3) > 0, \\ (x-5)(x+1) \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \text{ и } x > 3, \\ -1 \leqslant x \leqslant 5. \end{cases}$



О т в е т: $x \in [-1; 1) \cup (3; 5]$.

26. $\dfrac{3}{2}\log_4 \sqrt[3]{x} - \dfrac{1}{2}\log_x 2 > 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, x \neq 1 \\ \dfrac{1}{2}\log_4 x - \dfrac{1}{2}\log_2 x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \dfrac{\log_2 x}{\log_2 4} - \log_2 x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \log_2 x\left(\dfrac{1}{2} - 1\right) > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \log_2 x < -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x < \dfrac{1}{16}. \end{cases}$

О т в е т: $x \in \left(0; \dfrac{1}{16}\right)$.

27. $2\log_{25}((1+x)(3-x)) - \frac{1}{2}\log_{\sqrt{5}}(1+x) > \log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{2}$.

$$\begin{cases} (1+x)(3-x) > 0, \\ 1+x > 0, \\ 2\log_{25}((1+x)(3-x)) - \dfrac{1}{2}\dfrac{\log_{25}(1+x)}{\log_{25}\sqrt{5}} > \dfrac{\log_{25}\frac{1}{2}}{\log_{25}\frac{1}{5}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 3, \\ 2\log_{25}((1+x)(3-x)) - 2\log_{25}(1+x) > -2\log_{25}\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 3, \\ \log_{25}\dfrac{(1+x)(3-x)}{1+x} > \log_{25} 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 3, \\ 3-x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 2, \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 1.$$

Ответ: $x \in (-1;\ 1)$.

28. $\log_{\frac{1}{\sqrt{6}}}(5^{x+1} - 25^x) \geqslant -2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5^{x+1} - 25^x > 0, \\ \log_{\frac{1}{\sqrt{6}}}(5^{x+1} - 25^x) \geqslant -2\log_{\frac{1}{\sqrt{6}}}\dfrac{1}{\sqrt{6}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^{x+1} > 5^{2x}, \\ 5^{x+1} - 25^x \leqslant 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 2x, \\ (5^x)^2 - 5\cdot 5^x + 6 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1, \\ (5^x - 2)(5^x - 3) \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 1, \\ x \leqslant \log_5 2 \text{ и } x \geqslant \log_5 3. \end{cases}$$

$\log_5 3 < 1$, т. к. $\log_5 3 < \log_5 5$.

Ответ: $x \in (-\infty;\ \log_5 2] \cup [\log_5 3;\ 1)$.

29. $\dfrac{1}{\log_5(3-2x)} - \dfrac{1}{4 - \log_5(3-2x)} < 0$.

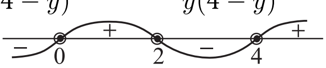
$3 - 2x > 0 \Leftrightarrow 2x < 3 \Leftrightarrow x < \dfrac{3}{2}$;

$\log_5(3-2x) \neq 0 \Rightarrow 3 - 2x \neq 1 \Rightarrow x \neq 1.$

$\log_5(3-2x) \neq 4 \Rightarrow 3 - 2x \neq 625 \Rightarrow x \neq -311.$

$\log_5(3-2x) = y$;

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{4-y} < 0 \Rightarrow \frac{4-y-y}{y(4-y)} < 0 \Rightarrow \frac{4-2y}{y(4-y)} < 0 \Rightarrow \frac{y-2}{y(y-4)} < 0.$$

Метод интервалов: 

$y \in (-\infty;\ 0) \cup (2;\ 4)$.

1) $\log_5(3-2x) < 0 \Rightarrow 3 - 2x < 1 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow 1 < x < \dfrac{3}{2}$.

2) $2 < \log_5(3-2x) < 4 \Rightarrow 25 < 3-2x < 625 \Rightarrow$
$\Rightarrow -311 < x < -11.$

Ответ: $x \in (-311;\ -11) \cup \left(1;\ \frac{3}{2}\right).$

30. $-3+\log_2 x^6 < \sqrt{7+\log_2 x^2}$; $x \neq 0.$
$-3+3\log_2 x^2 < \sqrt{7+\log_2 x^2}$; $\log_2 x^2 = y.$
$-3+3y < \sqrt{7+y} \Rightarrow \sqrt{7+y} > 3y-3.$

1) $\begin{cases} 3y-3 \geqslant 0, \\ 7+y > 9x^2-18y+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geqslant 1, \\ 9y^2-19y+2 < 0. \end{cases}$

$9y^2-19y+2=0 \Rightarrow y_{1,\,2} = \dfrac{19 \pm \sqrt{361-72}}{18} \Rightarrow$
$\Rightarrow y_{1,\,2} = \dfrac{19 \pm 17}{18} \Rightarrow y_1 = \dfrac{1}{9}$ и $y_2 = 2.$

$\begin{cases} y \geqslant 1, \\ 9\left(y-\frac{1}{9}\right)(y-2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geqslant 1, \\ \frac{1}{9} < y < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leqslant y < 2.$

$1 \leqslant \log_2 x^2 < 2 \Rightarrow 2 \leqslant x^2 < 4 \Rightarrow x \in (-2;\ -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}\,;\ 2).$

2) $\begin{cases} 3y-3 < 0, \\ 7+y \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y < 1, \\ y \geqslant -7 \end{cases} \Leftrightarrow -7 \leqslant y < 2.$

$-7 \leqslant \log_2 x^2 < 1 \Rightarrow 2^{-7} < x^2 < 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in (-\sqrt{2}\,;\ -2^{-\frac{7}{2}}) \cup (2^{-\frac{7}{2}};\ \sqrt{2}\,).$

Ответ: $x \in (-2;\ -2^{-\frac{7}{2}}) \cup (2^{-\frac{7}{2}};\ 2).$

31. $\log_7 x - \log_x \dfrac{1}{7} \geqslant 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ \log_7 x + \log_x 7 \geqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ \log_7 x + \dfrac{1}{\log_7 x} \geqslant 2. \end{cases}$

$\log_7 x = y;$
$y + \dfrac{1}{y} - 2 \geqslant 0 \Rightarrow \dfrac{y^2-2y+1}{y} \geqslant 0 \Rightarrow \dfrac{(y-1)^2}{y} \geqslant 0 \Rightarrow y > 0.$
$\log_7 x > 0 \Rightarrow x > 1.$

Ответ: $x \in (1; \infty).$

32. $\log_{3x-1} 2x > 1.$

1) $\begin{cases} x > 0, \\ 3x-1 > 1, \\ 2x > 3x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x > \dfrac{2}{3}, \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{2}{3} < x < 1.$

2) $\begin{cases} x > 0, \\ 0 < 3x - 1 < 1, \\ 2x < 3x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \dfrac{1}{3} < x < \dfrac{2}{3}, \\ x > 1. \end{cases}$

Система несовместна.

Ответ: $x \in \left(\dfrac{2}{3}; 1\right)$.

33. $\left(\dfrac{x}{10}\right)^{\lg x - 2} < 100$; $x > 0$.

Логарифмируем по основанию 10:

$(\lg x - 2)\left(\lg \dfrac{x}{10}\right) < \lg 100 \Rightarrow (\lg x - 2)(\lg x - 1) < 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lg^2 x - 3\lg x + 2 - 2 < 0 \Rightarrow \lg x(\lg x - 3) < 0 \Rightarrow 0 < \lg x < 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 < x < 1000$.

Ответ: $x \in (1; 1000)$.

34. $(x^2 + x + 1)^x < 1$.

$x^2 + x + 1 > 0$ при всех x, т. к. $D = 1 - 4 < 0$.

Логарифмируем по основанию 10:

$x\lg(x^2 + x + 1) < \lg 1 \Rightarrow x\lg(x^2 + x + 1) < 0$.

1) $\begin{cases} x < 0, \\ \lg(x^2 + x + 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ x^2 + x + 1 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ x^2 + x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ x(x + 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < -1$.

2) $\begin{cases} x > 0, \\ \lg(x^2 + x + 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x^2 + x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x(x + 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x < -1. \end{cases}$

Система несовместна.

Ответ: $x \in (-\infty; \, -1)$.

35. $x^{\log_x (x+3)^2} \leqslant 16$.

$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ x \neq -3, \\ (x + 3)^2 \leqslant 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ (x + 3 - 4)(x + 3 + 4) \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ (x - 1)(x + 7) \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ -7 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

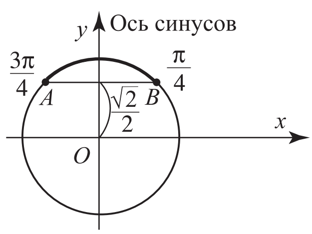
Ответ: $x \in (0; 1)$.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

1. $\sin x \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = (-1)^n \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$

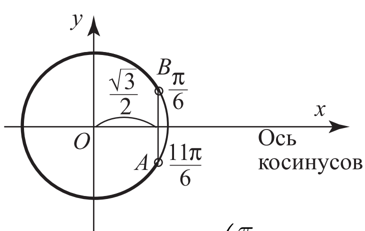
Отмечаем эти решения на окружности.



Неравенству удовлетворяют все точки окружности, лежащие на дуге AB (выше хорды AB).

Ответ: $x \in \left[\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n;\ \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$.

2. $\cos x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



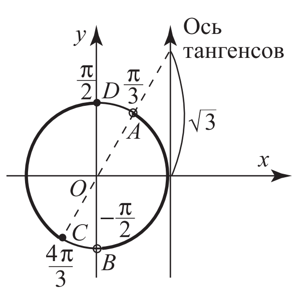
$\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Отмечаем эти решения на окружности.

Неравенству удовлетворяют все точки окружности, лежащие левее хорды AB.

Ответ: $x \in \left(\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \dfrac{11\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$.

3. $\operatorname{tg} x \leqslant \sqrt{3}$.



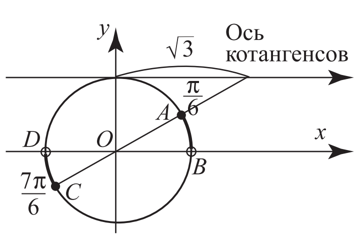
$\operatorname{tg} x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z.$

Отмечаем решения на окружности.

Неравенству удовлетворяют точки окружности, принадлежащие дугам AB и CD.

Ответ: $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi n;\ \dfrac{\pi}{3} + \pi n\right]$, $n \in Z$.

4. $\operatorname{ctg} x \geqslant \sqrt{3}$.



$\operatorname{ctg} x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$

Отмечаем соответствующие точки на окружности.

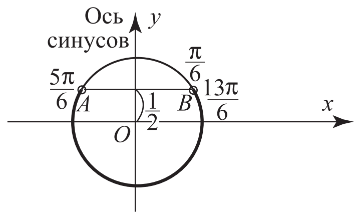
Неравенству удовлетворяют точки окружности, принадлежащие дугам AB и CD.

Ответ: $x \in \left(\pi n;\ \dfrac{\pi}{6} + \pi n\right]$, $n \in Z$.

5. $\sin 2x < \dfrac{1}{2}$.

$\sin 2x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$

Отмечаем эти точки на окружности.



Неравенству удовлетворяют точки дуги AB, лежащие ниже хорды AB.

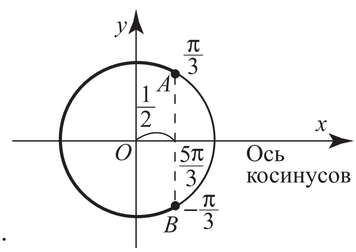
$2x \in \left(\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ \dfrac{13\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$.

Ответ: $x \in \left(\dfrac{5\pi}{12} + \pi n;\ \dfrac{13\pi}{12} + \pi n\right)$, $n \in Z$.

6. $2\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) \leqslant 1 \Rightarrow \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

$\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2x + \dfrac{\pi}{3} = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$

Отмечаем соответствующие точки на окружности.



Неравенству удовлетворяют точки дуги AB левее хорды AB.

$2x + \dfrac{\pi}{3} \in \left[\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n;\ \dfrac{5\pi}{3} + 2\pi n\right]$, $n \in Z \Rightarrow 2x \in \left[2\pi n;\ \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$.

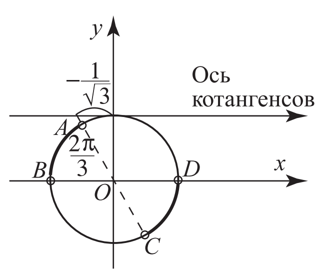
Ответ: $x \in \left[\pi n;\ \dfrac{2\pi}{3} + \pi n\right]$, $n \in Z$.

7. $\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4} - 2x\right) > 1 \Rightarrow \mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4} - 2x\right) > \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow -\mathrm{ctg}\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) > \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \mathrm{ctg}\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) < -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

$\mathrm{ctg}\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow 2x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{2\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z.$

Отмечаем соответствующие точки на окружности.



Неравенству удовлетворяют точки дуги AB и дуги CD.

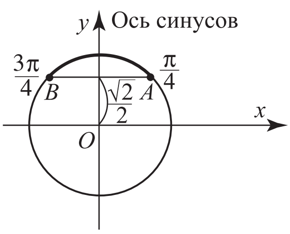
$2x - \dfrac{\pi}{4} \in \left(\dfrac{2\pi}{3} + \pi n;\ \pi + \pi n\right)$, $n \in Z \Rightarrow 2x \in \left(\dfrac{11\pi}{12} + \pi n;\ \dfrac{5\pi}{4} + \pi n\right)$, $n \in Z$.

Ответ: $x \in \left(\dfrac{11\pi}{24} + \dfrac{\pi n}{2};\ \dfrac{5\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{2}\right)$, $n \in Z$.

8. $4\sin 2x\cos 2x \geqslant \sqrt{2} \Rightarrow 2\sin 2x\cos 2x \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin 4x \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\sin 4x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 4x = (-1)^n \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$.

Отмечаем соответствующие точки на окружности.



Неравенству удовлетворяют точки дуги AB выше хорды AB.

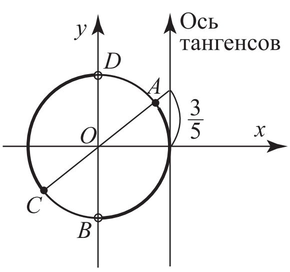
$\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n \leqslant 4x \leqslant \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$.

$\dfrac{\pi}{16} + \dfrac{\pi n}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{3\pi}{16} + \dfrac{\pi n}{2},\ n \in Z$.

О т в е т: $x \in \left[\dfrac{\pi}{16} + \dfrac{\pi n}{2};\ \dfrac{3\pi}{16} + \dfrac{\pi n}{2}\right]$, $n \in Z$.

9. $5\operatorname{tg} 2x \leqslant 3 \Rightarrow \operatorname{tg} 2x \leqslant \dfrac{3}{5}$.

$\operatorname{tg} 2x = \dfrac{3}{5} \Rightarrow 2x = \operatorname{arctg}\dfrac{3}{5} + \pi n,\ n \in Z$.



Отмечаем соответствующие точки на окружности.

Неравенству удовлетворяют точки дуг AB и CD.

$-\dfrac{\pi}{2} + \pi n < 2x \leqslant \operatorname{arctg}\dfrac{3}{5} + \pi n,\ n \in Z$.

$-\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2} < x \leqslant \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{3}{5} + \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

О т в е т: $x \in \left(-\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2};\ \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{3}{5} + \dfrac{\pi n}{2}\right]$, $n \in Z$.

10. $|\operatorname{tg} x| = \operatorname{ctg} x - \dfrac{1}{\cos x}$; $\sin x \neq 0$; $\cos x \neq 0$.

1) $\operatorname{tg} x \geqslant 0$.

$\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x - \dfrac{1}{\cos x} \Leftrightarrow \dfrac{\sin x}{\cos x} - \dfrac{\cos x}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow$

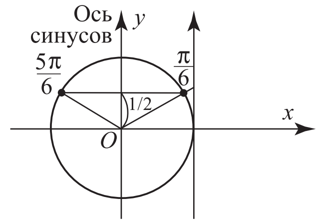
$\Leftrightarrow \dfrac{\sin^2 x - \cos^2 x + \sin x}{\sin x\cos x} = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x - 1 + \sin^2 x + \sin x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$.

$\sin x = y$; $2y^2 + y - 1 = 0 \Rightarrow y_{1,\,2} = \dfrac{-1 \pm 3}{4} \Rightarrow y_1 = -1$ и $y_2 = \dfrac{1}{2}$.

а) $\sin x = -1 \Rightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$, но $\cos\left(-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 0$, что невозможно.

б) $\sin x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$.



Отметим решения на окружности.

$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)>0$;

$\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi k\right)<0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in Z$.

2) $\operatorname{tg} x<0$.

$$-\operatorname{tg} x=\operatorname{ctg} x-\frac{1}{\cos x} \Leftrightarrow$$

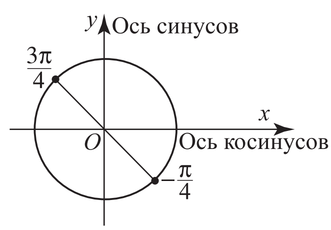
$$\Leftrightarrow -\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}=0 \Leftrightarrow \frac{-\sin^2 x-\cos^2 x+\sin x}{\sin x\cos x}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1+\cancel{\cos^2 x}-\cancel{\cos^2 x}+\sin x}{\sin x\cos x}=0 \Leftrightarrow \sin x=1;$$

$x=\frac{\pi}{2}+2\pi m$, $m\in Z$, но $\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\pi m\right)=0$, что невозможно.

О т в е т: $\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in Z$.

11. $1+2|\cos x|\sin x=0$.



1) $\cos x\geqslant 0$;

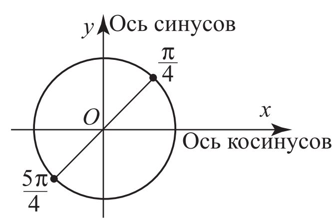
$1+2\cos x\sin x=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin 2x=-1 \Leftrightarrow 2x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$.

$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)>0$, а $\cos\frac{3\pi}{4}<0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=-\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$.

2) $\cos x<0$;

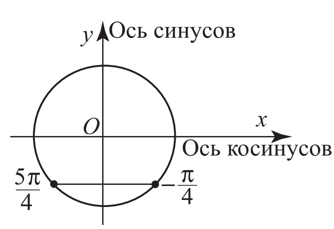


$1-2\cos x\sin x=0 \Leftrightarrow \sin 2x=$ $=1 \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+2\pi m$, $m\in Z \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\pi m$, $m\in Z$.

$\cos\frac{\pi}{4}>0$, а $\cos\frac{5\pi}{4}<0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\frac{5\pi}{4}+2\pi l$, $l\in Z$.



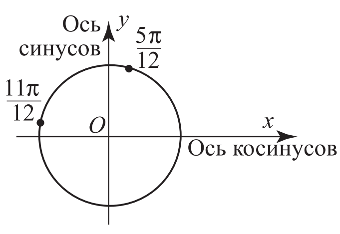
Отметим оба полученных решения на окружности: $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi k$ и $x=\frac{5\pi}{4}+2\pi l$, $l,\ k\in Z$.

Общая формула:
$x = (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z.$

Ответ: $(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z.$

12. $3^{\frac{1}{2}+\log_3 \cos x} + 6^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}+\log_9 \sin x}$; $\cos x > 0$; $\sin x > 0$.

$\sqrt{3}\cos x + \sqrt{6} = 3\sin x \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x + \sqrt{2}\sqrt{3} - 3\sin x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x - \cos x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \dfrac{1}{2}\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x \cos\dfrac{\pi}{6} - \cos x \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x - \dfrac{\pi}{6} = (-1)^n\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + (-1)^n\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$



1) $n = 2k$; $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z \Rightarrow x = \dfrac{5\pi}{12} + 2\pi k,\ k \in Z.$

$\sin\dfrac{5\pi}{12} > 0$ и $\cos\dfrac{5\pi}{12} > 0$.

2) $n = 2m + 1$; $x = \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{4} + 2\pi m + \pi \Rightarrow x = \dfrac{11\pi}{12} + 2\pi m$, $m \in Z$.

$\sin\dfrac{11\pi}{12} > 0$; $\cos\dfrac{11\pi}{12} < 0$.

Ответ: $\dfrac{5\pi}{12} + 2\pi k,\ k \in Z.$

ЧИСЛОВЫЕ ОЦЕНКИ

Какое из чисел больше?

1. $\sqrt[3]{18}$ или $\left(\dfrac{1}{6}\right)^{\log_6 2 - \frac{1}{2}\log_{\sqrt{6}} 5}$?

$$\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_6 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\sqrt{6}} 5}} = 6^{\frac{1}{2}\log_{\sqrt{6}} 5 - \log_6 2} = \frac{6^{\frac{1}{2}\frac{\log_6 5}{\log_6 \sqrt{6}}}}{6^{\log_6 2}} = \frac{5}{2};$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{125}{8} = 15{,}625;\ 18 > 15{,}625.$$

Ответ: $\sqrt[3]{18} > \left(\dfrac{1}{6}\right)^{\log_6 2 - \frac{1}{2}\log_{\sqrt{6}} 5}$.

2. $\sqrt{1 - 2\sin\dfrac{3\pi}{2}}$ или $\sqrt[3]{5\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4}}$?

$$\sqrt{1 - 2\sin\frac{3\pi}{2}} = \sqrt{1 - 2\cdot(-1)} = \sqrt{3}.\ \sqrt[3]{5\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}} = \sqrt[3]{5}.$$

$\sqrt{3} > \sqrt[3]{5}\,? \Rightarrow (\sqrt{3})^6 > (\sqrt[3]{5})^6? \Rightarrow 27 > 25$ верно.

Ответ: $\sqrt{1 - 2\sin\frac{3\pi}{2}} > \sqrt[3]{5\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}}$.

3. $\log_2 3$ или $\log_5 8$?

$2\log_2 3 = \log_2 9 > \log_2 8 = 3 \Rightarrow \log_2 3 > \frac{3}{2}$.

$2\log_5 8 = \log_5 64 < \log_5 125 = 3 \Rightarrow \log_5 8 < \frac{3}{2}$.

Ответ: $\log_2 3 > \log_5 8$.

4. 2^{300} или 3^{200}?

Прологарифмируем по основанию 2:

$300\log_2 2$ или $200\log_2 3$; 3 или $2\log_2 3$.

$2\log_2 3 = \log_2 9 > \log_2 8 = 3$.

Ответ: $3^{200} > 2^{300}$.

5. $\frac{9}{\sqrt{11} - \sqrt{2}}$ или $\frac{6}{3 - \sqrt{3}}$?

$\frac{9(\sqrt{11} + \sqrt{2})}{(\sqrt{11} - \sqrt{2})(\sqrt{11} + \sqrt{2})}$ или $\frac{6(3 + \sqrt{3})}{(3 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{3})} \Rightarrow \frac{9(\sqrt{11} + \sqrt{2})}{11 - 2}$ или $\frac{6(3 + \sqrt{3})}{9 - 3} \Rightarrow \sqrt{11} + \sqrt{2}$ или $3 + \sqrt{3} \Rightarrow (\sqrt{11} + \sqrt{2})^2$ или $(3 + \sqrt{3})^2 \Rightarrow 11 + 2\sqrt{22} + 2$ или $9 + 6\sqrt{3} + 3 \Rightarrow 2\sqrt{22} + 1$ или $6\sqrt{3} \Rightarrow (2\sqrt{22} + 1)^2$ или $(6\sqrt{3})^2 \Rightarrow 88 + 4\sqrt{22} + 1$ или $108 \Rightarrow \Rightarrow 4\sqrt{22}$ или $19 \Rightarrow (4\sqrt{22})^2$ или $19^2 \Rightarrow 352$ или 361, $352 < 361 \Rightarrow \Rightarrow \frac{9}{\sqrt{11} - \sqrt{2}} < \frac{6}{3 - \sqrt{3}}$.

Ответ: $\frac{9}{\sqrt{11} - \sqrt{2}} < \frac{6}{3 - \sqrt{3}}$.

6. $\sin 3$ или $\log_3 2$?

$\pi < 3{,}6 \Rightarrow 5\pi < 18 \Rightarrow \frac{5\pi}{6} < 3$.

Функция $y = \sin x$ при $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ убывает, поэтому $\sin\frac{5\pi}{6} > > \sin 3 \Rightarrow \sin 3 < \frac{1}{2}$.

$4\log_3 2 = \log_3 16 > \log_3 9 = 2 \Rightarrow 4\log_3 2 > 2\log_3 2 > \frac{1}{2}$.

Ответ: $\log_3 2 > \sin 3$.

Доказать неравенства.

7. $\log_4 9 > \log_5 11$.

$\log_4 9 = \log_{2^2} 3^2 = \log_2 3$; $3^2 > 2^3 \Rightarrow 2\log_2 3 > 3\log_2 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow \log_2 3 > \frac{3}{2} \Rightarrow \log_4 9 > \frac{3}{2}$.

$11^2 < 5^3 \Rightarrow \log_5 11^2 < \log_5 5^3 \Rightarrow 2\log_5 11 < 3 \Rightarrow \log_5 11 < \frac{3}{2}$.

Неравенство доказано.

8. $\log_2 7 + \left(3 + \cos\frac{15}{7}\right)\log_7 2 < 4$.

1) $7^2 < 2^6 \Rightarrow \log_2 7^2 < \log_2 2^6 \Rightarrow 2\log_2 7 < 6 \Rightarrow \log_2 7 < 3$.

2) $2^5 < 7^2 \Rightarrow \log_7 2^5 < \log_7 7^2 \Rightarrow 5\log_7 2 < 2 \Rightarrow \log_7 2 < \frac{2}{5}$.

3) $\pi < 3{,}2 \Rightarrow 14\pi < 44{,}8 < 45 \Rightarrow 2\pi < \frac{45}{7} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} < \frac{15}{7}$.

Функция $y = \cos x$ при $x \in \left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$ убывает, поэтому $\cos\frac{2\pi}{3} >$ $> \cos\frac{15}{7} \Rightarrow \cos\frac{15}{7} < -\frac{1}{2}$.

$3 + \cos\frac{15}{7} < 3 - \frac{1}{2} \Rightarrow 3 + \cos\frac{15}{7} < \frac{5}{2}$.

4) $\log_2 7 + \left(3 + \cos\frac{15}{7}\right)\log_7 2 < 3 + \frac{5}{2}\frac{2}{5} = 4$.

Неравенство доказано.

9. $2\operatorname{tg}\frac{\pi}{5} > 1$.

$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\frac{\sqrt{3}}{3} > \frac{1}{2}$, т. к. $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$.

Функция $y = \operatorname{tg} x$ при $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ — возрастающая $\Rightarrow \operatorname{tg}\frac{\pi}{5} >$ $> \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{\pi}{5} > \frac{1}{2} \Rightarrow 2\operatorname{tg}\frac{\pi}{5} > 1$.

Неравенство доказано.

10. $\sqrt[3]{2} > \sqrt[7]{5}$.

Возведем обе части неравенства в 21-ю степень:

$(\sqrt[3]{2})^{21} = 2^7 = 128$; $(\sqrt[7]{5})^{21} = 5^3 = 125$. $128 > 125 \Rightarrow \sqrt[3]{2} >$ $> \sqrt[7]{5}$.

Неравенство доказано.

11. $2^{\sqrt{3}} < 3^{\sqrt{2}}$.

1) Логарифмируем обе части по основанию 3, тогда должно быть $\sqrt{3}\log_3 2 < \sqrt{2}\log_3 3 \Rightarrow \log_3 2 < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Докажем это последнее неравенство.

2) $3\log_3 2 = \log_3 8 < \log_3 9 = 2 \Rightarrow \log_3 2 < \dfrac{2}{3}$.

3) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} > \dfrac{2}{3}$, т. к. $\dfrac{2}{3} = \dfrac{6}{9} > \dfrac{4}{9} \Rightarrow \log_3 2 < \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

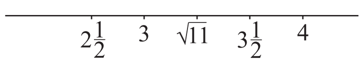
Неравенство доказано.

12. Среди корней уравнения $\dfrac{\sin 2\pi x}{1 + \operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}} = 0$ найти тот, который ближе всего к числу $\sqrt{11}$ на числовой прямой.

1) $\begin{cases} \sin 2\pi x = 0, \\ \cos\dfrac{\pi x}{2} \neq 0, \\ \operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2} \neq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\pi x = 0 \text{ или } \cos\pi x = 0, \\ \dfrac{\pi x}{2} \neq \pi 2 + \pi k,\ k \in Z, \\ \dfrac{\pi x}{2} \neq -\dfrac{\pi}{2} + \pi l,\ l \in Z \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = n;\ x = \dfrac{1}{2} + m,\ m \in Z, \\ x \neq 2k + 1,\ k \in Z, \\ x \neq 2l - \dfrac{1}{2},\ l \in Z. \end{cases}$

2) $3 < \sqrt{11} < 4$.



$x = 3$ не подходит, т. к. $x \neq 2k + 1$, т. е. x не может быть нечетным числом. $x = 3\dfrac{1}{2}$ не подходит, т. к. $x \neq 2l - \dfrac{1}{2}$, а $3\dfrac{1}{2} = 4 - \dfrac{1}{2}$.

3) Сравним расстояния между числами $2\dfrac{1}{2}$ и $\sqrt{11}$; 4 и $\sqrt{11}$.

Допустим, $\sqrt{11} - 2\dfrac{1}{2} > 4 - \sqrt{11}$, тогда $2\sqrt{11} > 6\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \Leftrightarrow 2\sqrt{11} > \dfrac{13}{2} \Leftrightarrow 4\sqrt{11} > 13 \Leftrightarrow 16 \cdot 11 > 169 \Leftrightarrow 176 > 169$.

Это верно. Поскольку преобразования были равносильными, верно и допущение.

Ответ: ближайший к $\sqrt{11}$ корень уравнения равен 4.

Системы уравнений и неравенств

Если какие-либо уравнения или неравенства объединены фигурной скобкой в систему, то предполагается, что они должны быть выполнены одновременно, т. е. решениями системы могут быть только такие значения неизвестных, которые удовлетворяют всем уравнениям и неравенствам, входящим в систему.

Если система уравнений или неравенств имеет решения, то говорят, что она *совместна*, если она решений не имеет, то — *несовместна*.

Системы называются **равносильными**, если множества их решений совпадают. Основу решения системы составляют равносильные преобразования входящих в нее уравнений и неравенств. Поскольку система включает, как правило, не одну неизвестную величину, а две, три и, возможно, больше, то для исключения неизвестных и приведения системы к уравнениям и неравенствам с одной неизвестной используют такой прием как подстановка. Если из одного уравнения можно выразить одну неизвестную через другую, а затем подставить ее в другое уравнение, то это хороший способ решения, нужно только помнить об ограничениях. Однако это нелегко сделать сразу, требуются дополнительные преобразования.

Можно складывать и вычитать уравнения системы с целью исключения одной из неизвестных. Решение системы записывается следующим образом: если в системе две неизвестных x и y, то $(x; y)$, если три неизвестных x, y, z, то $(x; y; z)$ и т. п. В системах, так же как и в уравнениях, используются разложение на множители, замена переменных.

Умение решать системы важно при решении текстовых задач и часто является наиболее трудоемкой частью решения.

1. $\begin{cases} 2x + 3y = -7 \\ 3x - y = 6. \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x = -7 - 3y, \\ 3x - y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-7-3y}{2}, \\ 3\dfrac{-7-3y}{2} - y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-7-3y}{2}, \\ -21 - 9y - 2y - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-7-3y}{2}, \\ 11y = -33 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-7-3y}{2}, \\ y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = -3. \end{cases}$$

Ответ: $(1;\ -3)$.

2. $\begin{cases} 3x + y = 5, \\ 2x - y = 1. \end{cases}$

$$+\begin{cases} 3x + y = 5, \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 6, \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{6}{5}, \\ y = \dfrac{7}{5}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{6}{5}; \dfrac{7}{5}\right)$.

3. $\begin{cases} x + xy = 1, \\ x = 3y + 1. \end{cases}$

$$\begin{cases} x(1+y) = 1, \\ x = 3y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3y+1)(1+y) = 1, \\ x = 3y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y^2 + 4y = 0, \\ x = 3y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(3y+4) = 0, \\ x = 3y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \text{ и } y_2 = -\dfrac{4}{3}, \\ x_1 = 1,\ x_2 = -3. \end{cases}$$

Ответ: $(1; 0)$ и $\left(-3;\ -\dfrac{4}{3}\right)$.

4. $\begin{cases} x^2 + xy = 10, \\ x^3 + x^2y = 20. \end{cases}$

$$\begin{cases} x(x+y) = 10, \\ x^2(x+y) = 20. \end{cases}$$

Разделим 2-е уравнение на 1-е, т. к. $x \neq 0$ и $x + y \neq 0$.

Получаем $x = 2$; $y = \dfrac{10 - x^2}{x} \Rightarrow y = 3$.

Ответ: $(2; 3)$.

5. $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{3}{2}, \\ x^2 + y^2 = 45. \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{xy}=\dfrac{3}{2}, \\ x\neq 0,\, y\neq 0, \\ x^2+y^2=45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-2y^2-3xy=0, \\ x\neq 0,\, y\neq 0, \\ x^2-y^2=45. \end{cases}$$

Делим 1-е уравнение на y^2:

$2\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-3\dfrac{x}{y}-2=0$; $\dfrac{x}{y}=z$;

$2z^2-3x-2=0 \Leftrightarrow z_{1,\,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{9+16}}{4} \Leftrightarrow z_1=-\dfrac{1}{2}$ и $z_2=2$.

1) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}=-\dfrac{1}{2}, \\ x\neq 0,\, y\neq 0, \\ x^2+y^2=45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x, \\ x\neq 0,\, y\neq 0, \\ x^2+4x^2=45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 3, \\ y=\pm 6. \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}=2, \\ x\neq 0,\, y\neq 0, \\ x^2+y^2=45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y, \\ x\neq 0,\, y\neq 0, \\ 4y^2+y^2=45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\pm 3, \\ x=\pm 6. \end{cases}$

Ответ: $(3;\,-6)$, $(-3;\,6)$, $(6;\,3)$, $(-6;\,-3)$.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

1. $\begin{cases} 3x+5y=21, \\ 2x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+5y=21, \\ y=2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+5(2x-1)=21, \\ y=2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+10x=21+5, \\ y=2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 13x=26, \\ y=2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=3. \end{cases}$

Ответ: $(2;\,3)$.

2. $\begin{cases} 2x-3y=-1, \\ \dfrac{y}{x}=0{,}75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y=-1, \\ y=0{,}75x \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3\cdot 0{,}75x=-1, \\ y=0{,}75x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -0{,}25x=-1, \\ y=0{,}75x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4, \\ y=3. \end{cases}$

Ответ: $(4;\,3)$.

3. $\begin{cases} 3y-x=-17, \\ 3y+5x=-5 \end{cases}$, вычитаем из второго уравнения первое, получаем $\begin{cases} 3y - x = -17, \\ 6x = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ 3y = -17 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = -5. \end{cases}$

О т в е т: $(2;\ -5)$.

4. $\left.\begin{cases} 4x + \dfrac{9}{y} = 21, \\ \dfrac{18}{y} = 17 - 3x \end{cases}\right| \cdot 2 \Leftrightarrow -\begin{cases} \dfrac{18}{y} + 8x = 42, \\ \dfrac{18}{y} + 3x = 17 \end{cases}$ вычитаем из первого уравнения второе, получаем $\begin{cases} 5x = 25, \\ \dfrac{18}{y} = 17 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5, \\ \dfrac{18}{y} = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5, \\ y = 9. \end{cases}$

О т в е т: $(5;\ 9)$.

5. $\left.\begin{cases} \dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{y} = 21, \\ \dfrac{5}{x} + \dfrac{4}{y} = 13 \end{cases}\right| \cdot 2 \Leftrightarrow + \begin{cases} \dfrac{6}{x} - \dfrac{4}{y} = 42, \\ \dfrac{5}{x} + \dfrac{4}{y} = 13 \end{cases}$ складываем первое и второе уравнения, получаем $\begin{cases} \dfrac{11}{x} = 55, \\ \dfrac{5}{x} + \dfrac{4}{y} = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{5}, \\ \dfrac{4}{y} = 13 - \dfrac{5}{x} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{5}, \\ y = -\dfrac{1}{3}. \end{cases}$

О т в е т: $\left(\dfrac{1}{5};\ -\dfrac{1}{3}\right)$.

6. $\begin{cases} x + 2y = 4, \\ x^2 - 4y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 4, \\ (x - 2y)(x + 2y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow + \begin{cases} x + 2y = 4, \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 4, \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 1. \end{cases}$

О т в е т: $(2;\ 1)$.

7. $\begin{cases} 2x + y - z = 6, \\ 3x - y + 2z = 5, \\ 4x + 2y - 5z = 9 \end{cases} \Leftrightarrow + \begin{cases} 5x + z = 11, \\ 6x - 2y + 4z = 10, \\ 4x + 2y - 5z = 9 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow + \begin{cases} 5x + z = 11, \\ 10x - z = 19, \\ y = 6 - 2x + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15x = 30, \\ z = 11 - 5x, \\ y = 6 - 2x + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ z = 1, \\ y = 3. \end{cases}$$

Ответ: (2; 3; 1).

8. $\begin{cases} 2x + y + 3z = 13, \\ x + y + z = 6, \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$ вычитаем из третьего уравнения второе и умножаем второе уравнение на 3, получаем

$$\begin{cases} 2x = 2, \\ 2x + y + 3z = 13, \\ 3x + 3y + 3z = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x + 2y = 5, \\ z = 6 - x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \\ z = 3. \end{cases}$$

Ответ: (1; 2; 3).

9. $\begin{cases} 6x + 2y - z = 2, \\ 4x - y + 3z = -3, \\ 3x + 2y - 2z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 2y - z = 2, \\ 3x + 2y - 2z = 3, \\ 8x - 2y + 6z = -6 \end{cases}$ вычитаем из первого уравнения второе и складываем второе и третье уравнения, получаем $\left.\begin{cases} 3x + z = -1, \\ 11x + 4z = -3, \\ 6x + 2y - z = 2 \end{cases}\right| \cdot 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ 4z = 8, \\ 2y = 2 + 6 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ z = 2, \\ y = 5. \end{cases}$$

Ответ: (−1; 5; 2).

10. $\begin{cases} 3x + y = 2, \\ x^2 - xy + 6y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - 3x, \\ x^2 - x(2 - 3x) + 6(2 - 3x) = -4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - 3x, \\ x^2 - 2x + 3x^2 + 12 - 18x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - 3x, \\ 4x^2 + 20x + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - 3x, \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - 3x, \\ x_1 = 1;\ x_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = -1;\ y_2 = -10, \\ x_1 = 1;\ x_2 = 4. \end{cases}$$

Ответ: (1; − 1); (4; − 10).

11. $\begin{cases} x^2 - y = 14, \\ 3x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 18 = 0, \\ y = 4 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -6;\ x_2 = 3, \\ y_1 = 22;\ y_2 = -5. \end{cases}$

Ответ: $(-6;\ 22);\ (3;\ -5)$.

12. $\begin{cases} x + y + xy = 11, \\ x + y - xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 12, \\ x + y + xy = 11 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - x, \\ x + 6 - x + x(6 - x) - 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - x, \\ -x^2 + 6x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - x, \\ x^2 - 6x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - x, \\ x_1 = 1;\ x_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1;\ x_2 = 5, \\ y_1 = 5;\ y_2 = 1. \end{cases}$

Ответ: $(1;\ 5),\ (5;\ 1)$.

13. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ xy = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ y = \dfrac{48}{x} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \dfrac{2304}{x^2} = 100, \\ y = \dfrac{48}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 100x^2 + 2304 = 0, \\ y = \dfrac{48}{x} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 64)(x^2 - 36) = 0, \\ y = \dfrac{48}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{1,\,2} = \pm 8,\ x_{3,\,4} = \pm 6, \\ y_{1,\,2} = \pm 6,\ y_{3,\,4} = \pm 8. \end{cases}$

Ответ: $(8;\ 6),\ (-8;\ -6),\ (6;\ 8),\ (-6;\ -8)$.

14. $\begin{cases} \dfrac{x + y}{x - y} + \dfrac{x - y}{x + y} = \dfrac{13}{6}, \\ xy = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2}{x^2 - y^2} = \dfrac{13}{6}, \\ xy = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x^2 + 2y^2}{x^2 - y^2} = \dfrac{13}{6}, \\ xy = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 12x^2 + 12y^2 = 13x^2 - 13y^2, \\ xy = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 25y^2 = 0, \\ x = \dfrac{5}{y} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{25}{y^2} - 25y^2 = 0, \\ x = \dfrac{5}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - y^4 = 0, \\ x = \dfrac{5}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_{1,\,2} = \pm 1, \\ x_{1,\,2} = \pm 5. \end{cases}$

Ответ: $(5;\ 1),\ (-5;\ -1)$.

15. $\begin{cases} x^2y^3 = 8, \\ x^3y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{x} = 2, \\ x^2y^3 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x, \\ 8x^5 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases}$

Ответ: (1; 2).

16. $\begin{cases} x(y+1) = 0, \\ x + 5xy + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ и } y = -1, \\ y = 4 \text{ и } x = -\dfrac{5}{4}. \end{cases}$

Ответ: (0; 4), $\left(-\dfrac{5}{4};\ -1\right)$.

17. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 65, \\ x^2y + xy^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow : \begin{cases} (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 65, \\ xy(x+y) = 20 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2 - xy + x^2}{xy} = \dfrac{65}{20}, \\ x^3 + y^3 = 65 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{y} - 1 + \dfrac{y}{x} = \dfrac{13}{4}, \\ x^3 + y^3 = 65 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{17}{4}, \\ x^3 + y^3 = 65. \end{cases}$

$\dfrac{x}{y} = z.$

$z + \dfrac{1}{z} = \dfrac{17}{4} \Rightarrow z^2 - \dfrac{17}{4}z + 1 = 0 \Rightarrow 4z^2 - 17z + 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow z_{1,\,2} = \dfrac{17 \pm \sqrt{289 - 64}}{8} \Rightarrow z_{1,\,2} = \dfrac{17 \pm 15}{8} \Rightarrow z_1 = \dfrac{1}{4}$ и $z_2 = 4.$

1) $\dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow y = 4x;$

$\begin{cases} x^3 + y^3 = 65, \\ y = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 64x^3 = 65, \\ y = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 4. \end{cases}$

2) $\dfrac{x}{y} = 4 \Rightarrow x = 4y;$

$\begin{cases} x^3 + y^3 = 65, \\ x = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 64y^3 + y^3 = 65, \\ x = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1, \\ x = 4. \end{cases}$

Ответ: (1; 4), (4; 1).

18. $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} + x = -1, \\ \dfrac{x}{x+y} = 2. \end{cases}$ $\dfrac{1}{x+y} = z;$ $\begin{cases} z + x = -1, \\ zx = -2; \end{cases}$

z и x являются корнями уравнения $t^2 + t - 2 = 0$, в соответствии с обратной теоремой Виета

$t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow t_1 = -2$ и $t_2 = 1.$

1) $\begin{cases} x = -2, \\ \dfrac{1}{x+y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ y - 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ y = 3. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = 1, \\ \dfrac{1}{x+y} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y + 1 = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = -\dfrac{3}{2}. \end{cases}$

Ответ: $(-2;\, 3)$, $\left(1;\ -\dfrac{3}{2}\right)$.

19. $\begin{cases} 9^x - 3 \cdot 5^y = 3, \\ 9^x \cdot 5^y = 18; \end{cases}$ $9^x = a > 0;\ 5^y = b > 0.$

$$\begin{cases} a - 3b = 3, \\ ab = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 + 3b, \\ 3b + 3b^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 + 3b, \\ b^2 + b - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 + 3b, \\ b_1 = 3 \text{ и } b_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -6 \text{ и } a_2 = 9, \\ b_1 = -3 \text{ и } b_2 = 2. \end{cases}$$

$a = -6$ и $b = -3$ не подходят;

$9^x = 9 \Rightarrow x = 1;$

$5^y = 2 \Rightarrow y = \log_5 2.$

Ответ: $(1;\ \log_5 2)$.

20. $\begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = 5, \\ 2\log_4 x + \log_2 y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ x^2 + y^2 = 32, \\ \dfrac{2\log_2 x}{\log_2 4} + \log_2 y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ x^2 + y^2 = 32, \\ xy = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ y = \dfrac{16}{x}, \\ x^2 + \dfrac{256}{x^2} = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ y = \dfrac{16}{x}, \\ x^4 - 32x^2 + 256 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ y = \dfrac{16}{x}, \\ (x^2 - 16)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4, \\ y = 4. \end{cases}$$

Ответ: $(4;\, 4)$.

21. $\begin{cases} \log_{x-1}(5 - y) < 0, \\ \log_{2-y}(4 - x) < 0. \end{cases}$

1) $\begin{cases} 0 < x - 1 < 1, \\ 5 - y > 1, \\ 0 < 2 - y < 1, \\ 4 - x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 2, \\ y < 4, \\ 1 < y < 2, \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 2, \\ 1 < y < 2. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x-1>1, \\ 0<5-y<1, \\ 2-y>1, \\ 0<4-x<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2, \\ 4<y<5, \\ y<1, \\ 3<x<4 \end{cases}$

Система несовместна, $\varnothing$.

3) $\begin{cases} 0<x-1<1, \\ 5-y>1, \\ 2-y>1, \\ 0<4-x<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1<x<2, \\ y<4, \\ y<1, \\ 3<x<4. \end{cases}$

Система несовместна, $\varnothing$.

4) $\begin{cases} x-1>1, \\ 0<5-y<1, \\ 0<2-y<1, \\ 4-x>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2, \\ 4<y<5, \\ 1<y<2, \\ x<3. \end{cases}$

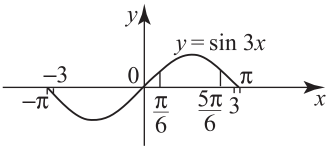
Система несовместна, $\varnothing$.

Ответ: $(x; y)$, $x \in (1; 2)$ и $y \in (1; 2)$.

22. $\begin{cases} 2\sin 3x = 1, \\ |x| < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = \frac{1}{2}, \\ -1 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = \frac{1}{2}, \\ -3 < 3x < 3. \end{cases}$

$\frac{5\pi}{6} < 3? \Rightarrow 5\pi < 18$ — верно, т. к. $\pi < 3{,}5$.

$\sin 3x = \frac{1}{2} \Rightarrow 3x = \frac{\pi}{6}$ и $3x = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{18}$ и $x_2 = \frac{5\pi}{18}$.



Ответ: $\frac{\pi}{18}$; $\frac{5\pi}{18}$.

23. $\begin{cases} \sqrt{x+3y+1} = 2, \\ \sqrt{2x-y+2} = 7x-6 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3y+1=4, \\ 2x-y+2=49y^2-84y+36, \\ 7y-6 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3-3y, \\ 49y^2-84y+36+y-2-6+6y=0, \\ y \geqslant \frac{6}{7} \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 3y, \\ 49y^2 - 77y + 28 = 0, \\ y \geqslant \dfrac{6}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 3y, \\ 7y^2 - 11y + 4 = 0, \\ y \geqslant \dfrac{6}{7} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 3y, \\ y_{1,\,2} = \dfrac{11 \pm \sqrt{121 - 112}}{14}, \\ y \geqslant \dfrac{6}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 3y, \\ y_1 = 1 \text{ и } y_2 = \dfrac{4}{7}, \\ y \geqslant \dfrac{6}{7} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

Ответ: (0; 1).

24. $\begin{cases} 2x + 2^y = -1, \\ -20x + 3{,}5 \cdot 2^{y+1} = 146 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2^y = -1, & \mid \cdot 10 \\ -20x + 7 \cdot 2^y = 146 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow + \begin{cases} 20x + 10 \cdot 2^y = -10, \\ -20x + 7 \cdot 2^y = 146 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 17 \cdot 2^y = 136, \\ 2x + 2^y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^y = 8, \\ 2x = -1 - 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3, \\ x = -4{,}5. \end{cases}$$

Ответ: (−4,5; 3).

25. $\begin{cases} \sqrt{y} + \lg x^2 = 2, \\ y + 4\lg x = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l|l} x > 0, & \\ \sqrt{y} + 2\lg x = 2, & \cdot(-2) \\ y + 4\lg x = 28 & \end{array} \right. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow + \begin{cases} x > 0, \\ -2\sqrt{y} - 4\lg x = -4, \\ y + 4\lg x = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ y - 2\sqrt{y} = 24, \\ \lg x = \dfrac{28 - y}{4}; \end{cases} \quad \sqrt{y} = z \geqslant 0.$$

$z^2 - 2z - 24 = 0 \Rightarrow z_1 = -4$ и $z_2 = 6$.

$z = -4$ не подходит, т. к. $z \geqslant 0$.

$\sqrt{y} = 6 \Rightarrow y = 36$;

$\lg x = \dfrac{28 - 36}{4} \Rightarrow \lg x = -2 \Rightarrow x = 0{,}01$.

Ответ: (0,01; 36).

26. $\left\{ \begin{array}{l|l} \sqrt{2}\,y + \sqrt{12}\,\operatorname{ctg} x = 4, & \cdot 2 \\ 2\sqrt{2}\,y - \sqrt{27}\,\operatorname{ctg} x = 1 & \end{array} \right. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow - \begin{cases} 2\sqrt{2}\,y + 4\sqrt{3}\,\operatorname{ctg} x = 8, \\ 2\sqrt{2}\,y - 3\sqrt{3}\,\operatorname{ctg} x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7\sqrt{3}\,\operatorname{ctg} x = 7, \\ \sqrt{2}\,y + 2\sqrt{3}\,\operatorname{ctg} x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \\ y = \dfrac{4-2}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z, \\ y = \sqrt{2}\,. \end{cases}$$

О т в е т: $\left(\dfrac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z;\ \sqrt{2}\right)$.

27. $\begin{cases} \dfrac{2}{2x-y} + \dfrac{3}{x-2y} = \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{2}{2x-y} - \dfrac{1}{x-2y} = \dfrac{1}{18}. \end{cases}$

$\dfrac{2}{2x-y} = a;\ \dfrac{1}{x-2y} = b.$

$$-\begin{cases} a + 3b = \dfrac{1}{2}, \\ a - b = \dfrac{1}{18} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{18} + b, \\ 4b = \dfrac{8}{18} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{18} + b, \\ b = \dfrac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{6}, \\ b = \dfrac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{2x-y} = \dfrac{1}{6}, \\ \dfrac{1}{x-2y} = \dfrac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 12, \\ x - 2y = 9 \end{cases} \Bigg| \cdot (-2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow + \begin{cases} -4x + 2y = -24, \\ x - 2y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x = -15, \\ y = 2x - 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5, \\ y = -2. \end{cases}$$

О т в е т: $(5;\ -2)$.

28. $\begin{cases} x + \log_2 y = y \log_2 3 + \log_2 x, \\ x \log_2 72 + \log_2 x = 2y + \log_2 y \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ \log_2(2^x y) = \log_2(3^y x), \\ \log_2(72^x x) = \log_2(2^{2^y} - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ 2^x y = 3^y x, \\ x \cdot 72^x = y \cdot 4^y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{2^x}{3^y}, \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{4^y}{72^x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ \dfrac{2^x}{3^y} = \dfrac{4^y}{72^x}, \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{2^x}{3^y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ 144^x = 12^y, \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{2^x}{3^y} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ y = 2x, \\ \dfrac{x}{2x} = \dfrac{2^x}{3^{2x}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ y = 2x, \\ \left(\dfrac{2}{9}\right)^x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ y = 2x, \\ x\log_2 \dfrac{2}{9} = \log_2 \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ y = 2x, \\ x = \dfrac{-1}{1-\log_2 9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2\log_2 3 - 1} > 0, \\ y = \dfrac{2}{2\log_2 3 - 1} > 0. \end{cases}$$

О т в е т: $\left(\dfrac{1}{2\log_2 3 - 1}; \dfrac{2}{2\log_2 3 - 1}\right)$.

29. $\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 4x + 2y = 1, \\ 3x^2 - 2y^2 - 6x - 4y = 5 \end{cases} \Bigg| \cdot 2 \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow + \begin{cases} 4x^2 + 2y^2 - 8x + 4y = 2, \\ 3x^2 - 2y^2 - 6x - 4y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x^2 - 14x - 7 = 0, \\ 2x^2 + y^2 - 4x + 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 1 = 0, \\ 2x^2 + y^2 - 4x + 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{1,\,2} = 1 \pm \sqrt{2}\,, \\ y^2 + 2y + 1 = -2x^2 + 4x + 2. \end{cases}$$

1) $(y+1)^2 = -2(1+\sqrt{2}\,)^2 + 4(1+\sqrt{2}\,) + 2 \Rightarrow (y+1)^2 =$
$= -2 - 4\sqrt{2} - 4 + 4 + 4\sqrt{2} + 4 \Rightarrow (y+1)^2 = 0 \Rightarrow y = -1.$

2) $(y+1)^2 = -2(1-\sqrt{2}\,)^2 + 4(1-\sqrt{2}\,) + 2 \Rightarrow (y+1)^2 =$
$= -2 + 4\sqrt{2} - 4 + 4 - 4\sqrt{2} + 2 \Rightarrow (y+1)^2 = 0 \Rightarrow y = -1.$

О т в е т: $(1+\sqrt{2}\,;\ -1)$ и $(1-\sqrt{2}\,;\ -1)$.

30. $\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{1}{4}, \\ 3\,\mathrm{tg}\, x = \mathrm{ctg}\, y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{1}{4}, \\ \mathrm{tg}\, x\, \mathrm{tg}\, y = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{1}{4}, \\ \cos x \cos y = \dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \sin y + \cos x \cos y = 1, \\ -\sin x \sin y + \cos x \cos y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x-y) = 1, \\ \cos(x+y) = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2\pi n,\ n \in Z, \\ x + y = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in Z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi(m+n), \\ 2y = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi(m-n),\ m,\ n \in Z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi(m+n), \\ y = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi(m-n),\ m,\ n \in Z. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\pm\dfrac{\pi}{6} + \pi(m+n);\ \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi(m-n)\right),\ m,\ n \in Z.$

31. $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = x - 4, \\ \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = y - 4. \end{cases}$

$$\begin{cases} x + y \geqslant 0, \\ x - y \geqslant 0, \\ 2\sqrt{x+y} = x + y - 8, \\ 2\sqrt{x-y} = x - y. \end{cases} \qquad \begin{aligned} \sqrt{x+y} &= a \geqslant 0; \\ \sqrt{x-y} &= b \geqslant 0. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2a = a^2 - 8, \\ 2b = b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b(b-2) = 0; \\ a^2 - 2a - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 0;\ b_2 = 2, \\ a_1 = -2;\ a_2 = 4 \end{cases}$$

$a = -2$ не подходит.

1) $\begin{cases} \sqrt{x+y} = 4, \\ \sqrt{x-y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 16, \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8, \\ y = 8. \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sqrt{x+y} = 4, \\ \sqrt{x-y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 16, \\ x - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10, \\ y = 6. \end{cases}$

Ответ: (8; 8), (10; 6).

32. $\begin{cases} x - y + \sqrt{x^2 - 4y^2} = 2, \\ x^5\sqrt{x^2 - 4y^2} = 0. \end{cases}$

1) $\begin{cases} x = 0, \\ x^2 - 4y^2 \geqslant 0, \\ \sqrt{x^2 - 4y^2} = 2 + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ -4y^2 \geqslant 0, \\ \sqrt{-4y^2} = 2 + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ 0 = 2; \end{cases}$

невозможно.

2) $\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 0, \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + y, \\ 4 + 4y + y^2 - 4y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + y, \\ 3y^2 - 4y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + y, \\ y_{1,\,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + y, \\ y_1 = 2;\ y_2 = -\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4;\ x_2 = \dfrac{4}{3}, \\ y_1 = 2;\ y_2 = -\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Ответ: $(4;\ 2)$, $\left(\dfrac{4}{3};\ -\dfrac{2}{3}\right)$.

33. $\begin{cases} 2u + v = 7, \\ |u - v| = 2. \end{cases}$

$$1)\ + \begin{cases} 2u + v = 7, \\ u - v = 2, \\ u \geqslant v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u \geqslant v, \\ 3u = 9, \\ v = u - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3, \\ v = 1. \end{cases}$$

$$2)\ - \begin{cases} 2u + v = 7, \\ v - u = 2, \\ u < v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u < v, \\ 3u = 5, \\ v = 2 + u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \dfrac{5}{3}, \\ v = \dfrac{11}{3}. \end{cases}$$

Ответ: $(3;\ 1)$, $\left(1\dfrac{2}{3};\ 3\dfrac{2}{3}\right)$.

34. $\begin{cases} 3x^2 + 2xy - 9x - 4y + 6 = 0, \\ 5x^2 + 2xy - 12x - 4y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x - 2 = 0, \\ 3x^2 + 2xy - 9x - 4y + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{1,\,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4}, \\ 3x^2 - 9x + 6 = 2y(2 - x) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2;\ x_2 = -\dfrac{1}{2}, \\ 3(x - 2)(x - 1) + 2y(x - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2;\ x_2 = -\dfrac{1}{2}, \\ (x - 2)(3x - 3 + 2y) = 0. \end{cases}$$

1) При $x = 2$ y — любое число, т. е. $y \in (-\infty;\ \infty)$.

2) $x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow y = \dfrac{3x^2 - 9x + 6}{4 - 2x} = \dfrac{3 \cdot \frac{1}{4} + \frac{9}{2} + 6}{4 + 1} = \dfrac{45}{20} = \dfrac{9}{4} = 2\dfrac{1}{4}$.

Ответ: $(2;\ y)$, $y \in (-\infty;\ \infty)$, $\left(-\dfrac{1}{2};\ 2\dfrac{1}{4}\right)$.

35. $\begin{cases} \sqrt{\sin x}\,\cos y = 0, \\ 2\sin^2 x - \cos^2 y - 2 = 0. \end{cases}$

1) $\begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos 2y = -2 \text{ — невозможно, т. к. } |\cos 2y| \leqslant 1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} \cos y = 0, \\ \sin x \geqslant 0, \\ 2\sin^2 x - 2\cos^2 y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos y = 0, \\ \sin x \geqslant 0, \\ \sin^2 x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos y = 0, \\ \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (-1)^n \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z, \\ y = \dfrac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in Z. \end{cases}$

Ответ: $\left((-1)^n \dfrac{\pi}{4} + \pi n;\ \dfrac{\pi}{2} + \pi m\right)$, $m, n \in Z$.

36. $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = \dfrac{1}{9}, \\ y - x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x \cdot 2^y = \dfrac{1}{9}, \\ y = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x \cdot 2^{x+2} = \dfrac{1}{9}, \\ y = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 \cdot 6^x = \dfrac{1}{9}, \\ y = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6^x = 6^{-2}, \\ y = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ y = 0. \end{cases}$

Ответ: $(-2; 0)$.

37. $\begin{cases} 2x + y = x^2 + y^2 - 12, \\ 2^{x-2y} = 256 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = x^2 + y^2 - 12, \\ x - 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 + 2y, \\ 16 + 4y + y = 64 + 34y + 4y^2 + y^2 - 12 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 + 2y, \\ 5y^2 + 27y + 36 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 + 2y, \\ y_{1,\,2} = \dfrac{-27 \pm \sqrt{729 - 720}}{10} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 + 2y, \\ y_1 = -3;\ y_2 = -2{,}4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2;\ x_2 = 3{,}2, \\ y_1 = -3;\ y_2 = -2{,}4. \end{cases}$

Ответ: $(2;\ -3)$, $(3{,}2;\ -2{,}4)$.

38. $\begin{cases} \cos 4x + \sin 2y = -2, \\ x - y = 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 4x + \sin 2y = -2, \\ x = y + 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(4y + 8\pi) + \sin 2y = -2, \\ x = y + 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 4y + \sin 2y = -2, \\ x = y + 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2\sin^2 2y + \sin 2y + 2 = 0, \\ x = y + 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin^2 2y - \sin 2y - 3 = 0, \\ x = y + 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2y = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{4}, \\ x = y + 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2y = -1, \\ x = y + 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2y = -1, \\ x = y + 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z, \\ x = y + 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n, \\ x = \dfrac{7\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{7\pi}{4} + \pi n;\ -\dfrac{\pi}{4} + \pi n\right)$, $n \in Z$.

39. $\begin{cases} x - y = 6, \\ x^3 - y^3 = 126 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 + y, \\ (x-y)(x^2 + xy + y^2) = 126 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 + y, \\ x^2 + xy + y^2 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 + y, \\ 36 + 12y + y^2 + 6y + y^2 + y^2 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 + y, \\ y^2 + 6y + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 + y, \\ y_1 = -1;\ y_2 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5;\ x_2 = 1, \\ y_1 = -1;\ y_2 = -5. \end{cases}$$

Ответ: $(5;\ -1)$, $(1;\ -5)$.

40. $\begin{cases} y - x = 5, \\ zx = (z-4)y + 30, \\ 2zx = (2z-4)y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - x = 5, \\ zx = zy - 4y + 30, \\ 2zx = 2zy - 4y \end{cases}$ делим третье уравнение на второе, получаем $\begin{cases} y - x = 5, \\ 2 = \dfrac{2zy - 4y}{zy - 4y + 30}, \\ 2zx = 2zy - 4y \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 5, \\ 2zy - 8y + 60 = 2zy - 4y, \\ 2zx = 2zy - 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 5, \\ 4y = 60, \\ z = \dfrac{2y}{y - x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10, \\ y = 15, \\ z = 6. \end{cases}$$

Ответ: $(10;\ 15;\ 6)$.

41. $\begin{cases} xy = z, \\ xz = 4y, \\ yz = 9x. \end{cases}$ 1) $x = y = z = 0$. 2) $x \neq 0,\ y \neq 0,\ z \neq 0$.

$$\begin{cases} \dfrac{x}{z} = \dfrac{z}{9x}, \\ y = \dfrac{z}{x}, \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{4}{9}\,\dfrac{y}{z}. \end{cases} \quad \dfrac{x}{z} = a;\ \dfrac{x}{y} = b \Rightarrow x = by;\ z = \dfrac{x}{a}.$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{9a}, \\ y = \dfrac{1}{a}, \\ b = \dfrac{4}{9b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm\dfrac{1}{3}, \\ y = \pm 3, \\ b = \pm\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2, \\ y = \pm 3, \\ z = \pm 6. \end{cases}$$

1) $x > 0,\ y > 0 \Rightarrow z > 0$;
2) $x > 0,\ y < 0 \Rightarrow z < 0$;
3) $x < 0,\ y > 0 \Rightarrow z < 0$;
4) $x < 0,\ y < 0 \Rightarrow z > 0$.

Ответ: $(0;\ 0;\ 0)$, $(2;\ 3;\ 6)$, $(-2;\ 3;\ -6)$, $(2;\ -3;\ -6)$, $(-2;\ -3;\ 6)$.

Текстовые задачи

Традиционно текстовыми задачами называются задачи на составление уравнений. Однако встречаются задачи, в которых для нахождения требуемых неизвестных величин приходится пользоваться не только уравнениями, но и неравенствами, а иногда и другими условиями, которые не записываются в форме уравнений и неравенств. Поэтому главным, что объединяет задачи такого типа, является лишь то, что условие задано в форме некоторого текста, без формул, без предварительных буквенных обозначений неизвестных. Обычно в задаче описывается более или менее реальная ситуация, в которой одни величины известны, другие неизвестны. Требуется, исходя из условий задачи, определить одну или несколько неизвестных величин, иногда их комбинации и соотношения. Решение задачи в том случае, когда составляются уравнения, т. е. соотношения между известными и неизвестными величинами, происходит в три этапа: 1) выбор и обозначение неизвестных; 2) составление уравнений или неравенств; 3) решение полученной системы уравнений и неравенств. При наличии двух или нескольких решений системы выбирается то или те решения, которые соответствуют смыслу задачи. Так, например, не имеет смысла отрицательная стоимость чего-либо и т. п. При решении задачи важны все три этапа. Очень часто удачный выбор неизвестных быстро приводит к получению ответа, в то время как не совсем удачно выбранные неизвестные затягивают решение или делают его невозможным. Если неизвестные выбраны и обозначены, записать уравнения, как правило, труда не составляет, но нужно очень четко представлять, в чем состоит вопрос задачи. В результате решения систем уравнений и неравенств нужно ответить именно на этот вопрос, только тогда задача считается решенной. Для того чтобы записать словесные условия в виде уравнений и неравенств, нужно, читая условие задачи, постепенно вводить неизвестные и сразу записывать связи между известными и неизвестными величинами. Неважно, если неизвестных и уравнений будет много, постепенно ситуация упростится. Лучше выписывать все, что мы знаем о неизвестных величинах, чем упустить что-либо. При этом, если нужно найти какую-то определенную величину, необязательно находить другие величины, входящие в систему уравнений.

Обычно текстовые задачи делят на типы в зависимости от условий, представленных в тексте. Хотя существует достаточно много задач, в которых объединены несколько типичных условий. Так, задачи на «движение» могут включать проценты, а задачи на «работу» — целочисленные неизвестные и т. п. Тем не менее, мы выделили шесть типов текстовых задач, и, хотя готовых рецептов решения задач не существует, определенные подходы для каждого типа могут помочь при их решении. Прежде всего мы остановимся на **задачах на проценты, процентное содержание и концентрации**.

В задачах на проценты основные трудности связаны с понятием процента.

Процент — это сотая часть какой-либо величины. Процент обозначается знаком %, например 4%, 30%, 100%.

Чтобы число процентов выразить в виде дроби, нужно разделить его на 100, например, $50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$; $130\% = \frac{130}{100} = 1{,}3$. Чтобы найти $a\%$ от b, надо b умножить на $\frac{a}{100}$, например, 5% от 40 — это $\frac{40 \cdot 5}{100} = 2$.

Если известно, что $a\%$ числа A равны b, то $A = b\frac{100}{a}$, например, 10% числа A равны 5, тогда $A = \frac{5 \cdot 100}{10} = 50$.

1. На базу привезли 96 т капусты. 20% всей капусты отправили в магазин. Сколько капусты осталось?

Решение.

20% от $96 = \frac{\cancel{20} \cdot 96}{\cancel{100}_5} = 19{,}2$ (т);

$96 - 19{,}2 = 76{,}8$ (т)

Ответ: осталось 76,8 т капусты.

2. В цехе работают 60 рабочих, из них 36 фрезеровщиков. Сколько процентов от всего числа рабочих составляют фрезеровщики?

Решение. 36 составляют от 60 $\frac{36}{60}$ части;

$\frac{36}{60} = \frac{3}{5}$; $\frac{3}{5} \cdot 100\% = 60\%$.

Ответ: фрезеровщики составляют 60%.

3. Зарплата служащего составляла 1000 рублей. Затем ее повысили на 20%, а вскоре понизили на 20%. Сколько стал получать служащий?

Решение. Повышение на 20% означает увеличение зарплаты на 20% от 1000, поэтому увеличенная зарплата равна: $1000 + \frac{20}{100} \cdot 1000 = 1200$ (руб.). Понижение зарплаты на 20% означает уменьшение ее на 20% от 1200, поэтому окончательная зарплата равна: $1200 - \frac{20}{100} \cdot 1200 = 960$ (руб.).

Ответ: служащий стал получать 960 рублей.

Мы видим, что задачи не всегда решаются с помощью составления уравнений. Если возможно решение задачи без введения неизвестных и составления уравнений, то так и нужно поступать. Однако рассмотренные задачи достаточно просты. Более сложны задачи на смеси, процентное содержание и концентрации. Смесь или сплав состоит из нескольких веществ (компонентов). Отношение объема (веса, массы) одного из компонентов ко всему объему (весу, массе) смеси называется *концентрацией* этого компонента. О какой концентрации (объемной, весовой, массовой) идет речь в конкретной задаче, всегда ясно из ее условия. Концентрации — это безразмерные величины, выражающиеся либо в долях, либо в процентах. Очевидно, что сумма концентраций всех веществ, составляющих смесь, равна 1, если концентрации измеряются в долях, и равна 100%, если концентрации измеряются в процентах.

4. Смешали 30%-й раствор соляной кислоты с 10%-м и получили 600 г 15%-ного раствора. Сколько граммов каждого раствора взяли?

Решение. Пусть взяли x г 30%-ного раствора и y г 10%-ного раствора. Тогда можно написать два уравнения:

$$\begin{cases} x + y = 600, \\ \frac{30}{100}x + \frac{10}{100}y = 600 \cdot \frac{15}{100} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 600 - x, \\ 0{,}3x + 0{,}1y = 90 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 600 - x, \\ 0{,}3x + 60 - 0{,}1x = 90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 600 - x, \\ 0{,}2x = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 150, \\ y = 450. \end{cases}$$

Ответ: взяли 150 г 30%-ного раствора соляной кислоты и 450 г 10%-ного раствора.

5. Кусок сплава меди и цинка массой 36 кг содержит 45% меди. Какую массу меди нужно добавить к этому куску, чтобы полученный новый сплав содержал 60% меди?

Решение. В 36 кг сплава $36 \cdot 0{,}45 = 16{,}2$ кг меди. Если добавить x кг меди, то в сплаве меди будет $(16{,}2 + x)$ кг, а масса всего сплава будет $(36 + x)$ кг. По условию

$16{,}2 + x = \frac{60}{100}(36 + x) \Rightarrow 16{,}2 + x = 21{,}6 + 0{,}6x \Rightarrow 0{,}4x = $
$= 5{,}4 \Rightarrow x = 13{,}5.$

Ответ: нужно добавить 13,5 кг меди.

Следует обратить особое внимание на задачи с вычислением сложных процентов. Это, как правило, задачи с экономическим содержанием. Например, о хранении денег в банке с определенной процентной ставкой.

6. В банк положили 2000 рублей под 3% годовых. Каков будет вклад в банке через 5 лет?

Решение. Через год в банке будет
$2000 + 2000 \cdot 0{,}03 = 2000 \cdot 1{,}03$ (руб.);
через 2 года:
$2000 \cdot 1{,}03 + 2000 \cdot 1{,}03 \cdot 0{,}03 = 2000 \cdot 1{,}03^2$;
через 3 года:
$2000 \cdot 1{,}03^2 + 2000 \cdot 1{,}03^2 \cdot 0{,}03 = 2000 \cdot 1{,}03^3$ и т. д.
через 5 лет:
$2000 \cdot 1,03^5 \approx 2320$ (руб.).

Ответ: в банке будет около 2320 рублей.

Таким образом, если некое количество A регулярно увеличивается на определенный постоянный процент k, то через n этапов будет $A\left(1 + \frac{k}{100}\right)^n$. Это и есть вычисление сложного процента.

При решении **задач на движение** следует иметь в виду, что движение тел, о которых идет речь в задаче, если нет специальных оговорок, считается равномерным. Обычно вводятся следующие неизвестные: S — путь, v — скорость, t — время, в течение которого путь S преодолевается со скоростью v. Основная формула, использующаяся в этих задачах: $S = vt$, и производные формулы: $v = \frac{S}{t}$ и $t = \frac{S}{v}$. Возможны и другие обозначения, например, путь часто обозначают l, скорость — x. Повороты движущихся тел считаются мгновенными, т. е. они происходят без затрат времени, скорости также меняются мгновенно. Если тело движется по течению реки, то его скорость складывается из его собственной скорости, т. е. скорости движения в стоячей воде, и скорости течения реки, а если оно движется против течения реки, то из его собственной скорости вычитается скорость течения реки. Можно записать так: $v_{\text{по теч.}} = v_{\text{соб.}} + v_{\text{теч.}}$, $v_{\text{пр. теч.}} = v_{\text{соб.}} - v_{\text{теч.}}$.

Считается, что плот движется со скоростью течения.

При решении задач на движение часто встречаются следующие две возможности:

1) движение навстречу друг другу; если два тела движутся навстречу друг другу со скоростями v_1 и v_2 и первоначальное расстояние между ними равно S, то время, через которое они встретятся: $t = \dfrac{S}{v_1 + v_2}$; $v_1 + v_2$ в этом случае — скорость сближения тел;

2) движение в одном направлении, когда скорость одного тела превышает скорость другого, и первое тело догоняет второе. Если первоначальное расстояние между ними равно S и $v_1 > v_2$, то время до их встречи $t = \dfrac{S}{v_1 - v_2}$. В этом случае скорость сближения $v_1 - v_2$.

7. Поезд должен был пройти 220 км за определенное время. Через 2 часа после начала движения он был задержан на 10 мин и, чтобы прийти вовремя в пункт назначения, увеличил скорость на 5 км/ч. Найти первоначальную скорость поезда.

Решение. Обозначим первоначальную скорость поезда x км/ч. Тогда на весь путь он должен был затратить $\dfrac{220}{x}$ часов. Реально он за 2 часа прошел $2x$ км, и ему остало пройти $(220 - 2x)$ км. Последний участок пути он прошел со скоростью $(x + 5)$ км/ч и затратил на него $\dfrac{220 - 2x}{x + 5}$ часов. 10 мин $= \dfrac{1}{6}$ часа. Составим уравнение:

$$\frac{220}{x} = 2 + \frac{1}{6} + \frac{220 - 2x}{x + 5}.$$

Решим уравнение:

$$\frac{220}{x} - \frac{220 - 2x}{x + 5} = \frac{13}{6} \Rightarrow \frac{\cancel{220x} + 1100 - \cancel{220x} + 2x^2}{x(x + 5)} = \frac{13}{6} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1100 + 2x^2}{x^2 + 5x} = \frac{13}{6} \Rightarrow 13x^2 + 65x = 6600 + 12x^2 \Rightarrow x^2 + 65x -$$
$$- 6600 = 0 \Rightarrow x_{1,\,2} = \frac{-65 \pm \sqrt{4225 + 26\,400}}{2} \Rightarrow x_{1,\,2} = \frac{-65 \pm 175}{2} \Rightarrow$$
$\Rightarrow x = 55$ (отрицательное значение x не имеет смысла).

Ответ: первоначальная скорость поезда 55 км/ч.

8. Моторная лодка, скорость которой в стоячей воде равна 15 км/ч, прошла $139\frac{1}{3}$ км вниз по течению реки и вернулась обратно. Найти скорость течения реки, если на весь путь затрачено 20 часов.

Решение. Обозначим скорость течения реки x км/ч. Тогда скорость лодки по течению равна $(15 + x)$ км/ч, ее скорость против течения равна $(15 - x)$ км/ч. Составим уравнение:

$$\frac{418}{3(15+x)} + \frac{418}{3(15-x)} = 20.$$

Решим уравнение: $\dfrac{418(15-x) + 418(15+x)}{3(225-x^2)} = 20 \Rightarrow$
$\Rightarrow 418 \cdot 15 - \cancel{418x} + 418 \cdot 15 + \cancel{418x} = 60(225 - x^2) \Rightarrow 418 \cdot 30 = 60(225 - x^2) \Rightarrow 209 \cdot \cancel{60} = \cancel{60}(225 - x^2) \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$ (-4 не подходит).

Ответ: скорость течения 4 км/ч.

9. Две автомашины выехали одновременно из одного пункта в одном и том же направлении. Одна машина движется со скоростью 50 км/ч, другая — 40 км/ч. Спустя полчаса из того же пункта в том же направлении выехала третья машина, которая обогнала 1-ю машину на 1 ч 30 мин позже, чем 2-ю. Найти скорость третьей машины.

Решение. Пусть скорость 3-й машины x км/ч. Т.к. она обогнала две предыдущие машины, то $x > 50$. 1-я машина за полчаса прошла $50 \cdot 0{,}5 = 25$ (км), 2-я машина — $40 \cdot 0{,}5 = 20$ (км). Соответствующие скорости сближения 1-й и 3-й машин, 2-й и 3-й машин: $(x - 50)$ км/ч и $(x - 40)$ км/ч. Составим уравнение:

$$\frac{25}{x-50} - \frac{20}{x-40} = \frac{3}{2};$$

$$\frac{25x - 1000 - 20x + 1000}{(x-50)(x-40)} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{5x}{x^2 - 90x + 2000} = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 10x = 3x^2 - 270x + 6000 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 280x + 6000 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_{1,\,2} = \dfrac{140 \pm \sqrt{19\,600 - 18\,000}}{3} \Rightarrow x_{1,\,2} = \dfrac{140 \pm 40}{3} \Rightarrow x_1 = \dfrac{100}{3}$ и $x_2 = 60$;

$x = \dfrac{100}{3} = 33\dfrac{1}{3}$ не подходит, т.к. $x > 50$.

Ответ: скорость третьей машины 60 км/ч.

Следующий тип рассматриваемых задач — это **задачи на работу**. Несмотря на существенные отличия в тексте, решение задач этого типа аналогично решению задач на движение. Аналогия заключается в следующем: если обозначить весь объем выполняемых работ — A, производительность труда — p и t — время выполнения работы, то можно записать: $A = pt$ и, следовательно, $p = \dfrac{A}{t}$ и $t = \dfrac{A}{p}$. Несмотря на новые обозначения, это те же формулы, что и в задачах на движение. Производительность труда — это количество совершенной работы в единицу времени, например, объем выкопанного грунта за день, количество обработанных деталей в час, количество посаженных деревьев за неделю и т. п. Таким образом, работа A — аналог пути S, производительность труда (иногда говорят — мощность) — аналог скорости v.

10. Тракторная бригада может вспахать $\frac{5}{6}$ участка земли за 4 ч 15 мин. До обеденного перерыва бригада работала 4,5 ч, после чего остались невспаханными еще 8 га. Как велик был участок?

Решение. Пусть площадь участка a га, тогда $\frac{5}{6}a$ бригада вспахивает за $4\frac{1}{4}$ ч, и ее производительность: $\frac{5a}{6\cdot\frac{17}{4}} = \frac{20a}{6\cdot 17} = \frac{10a}{51}$ (га/ч). За 4,5 ч, работая с этой производительностью, бригада вспахала $\frac{10a}{51}\cdot\frac{9}{2}$ га $= \frac{15a}{17}$ га. Составим уравнение: $a - \frac{15a}{17} = 8$; $\frac{2a}{17} = 8 \Rightarrow 2a = 8\cdot 17 \Rightarrow a = 68$ (га).

Ответ: площадь участка 68 га.

11. Однотипные детали обрабатываются на 2-х станках. Производительность 1-го станка на 40% больше производительности 2-го. Сколько деталей было обработано за смену каждым станком, если 1-й станок работал 6 часов, а 2-й — 8 часов, причем оба станка вместе обработали 820 деталей?

Решение. Обозначим производительность 2-го станка x дет./ч, тогда производительность 1-го станка — $x + 40\%x = x + 0{,}4x = 1{,}4x$ (дет./ч).

Из условий составим уравнение:

$1{,}4\cdot 6 + x\cdot 8 = 820$;

$8{,}4x + 8x = 820 \Rightarrow 16{,}4x = 820 \Rightarrow x = 50$;

$1{,}4x = 70$.

$70\cdot 6 = 420$ (дет.); $50\cdot 8 = 400$ (дет.).

Ответ: 1-й станок обработал 420 деталей, а 2-й — 400 деталей.

12. В одном бассейне имеется 200 м^3 воды, а в другом 112 м^3. Открывают краны, через которые наполняются бассейны. Через сколько часов количество воды в бассейнах будет одинаковым, если во 2-й бассейн вливается в час на 22 м^3 больше воды, чем в 1-й?

Решение. Допустим, в 1-й бассейн вливается в час x м^3 воды, тогда во 2-й бассейн вливается в час $(x+22)$ м^3 воды. Допустим также, что выравнивание количества воды в бассейнах произойдет через t часов. Составим уравнение, исходя из условий задачи:

$200 + xt = 112 + (x+22)t;$

$200 + \cancel{xt} = 112 + \cancel{xt} + 22t \Rightarrow 22t = 88 \Rightarrow t = 4.$

Ответ: через 4 часа.

13. Двое рабочих, из которых второй начал работать на 1,5 дня позже первого, работая независимо один от другого, оклеили обоями несколько комнат за 7 дней, считая с момента выхода на работу первого рабочего. Если бы эта работа была поручена каждому рабочему отдельно, то первому для ее выполнения понадобилось бы на 3 дня больше, чем второму. За сколько дней каждый из них отдельно выполнил бы эту же работу?

Решение. Допустим, 1-й рабочий выполнил работу за x дней, а 2-й — за y дней, выполненная работа — A комнат. Тогда производительность 1-го рабочего — $\frac{A}{x}$ комн./день; 2-го рабочего — $\frac{A}{y}$ комн./день. Исходя из условий, составляем систему:

$$\begin{cases} x - y = 3, \\ \frac{A}{x}\cdot 7 + \frac{A}{y}\cdot 5{,}5 = A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 3, \\ \frac{7}{x} + \frac{5{,}5}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 3, \\ \frac{7}{y+3} + \frac{5{,}5}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 3, \\ 7x + 5{,}5y + 16{,}5 = y^2 + 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 3, \\ y^2 - 9{,}5y - 16{,}5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 3, \\ y_{1,\,2} = \frac{9{,}5 \pm \sqrt{90{,}25 + 66}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 3, \\ y_{1,\,2} = \frac{9{,}5 \pm 12{,}5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 14, \\ y = 11 \end{cases}$$

(отрицательное y не имеет смысла).

Ответ: за 14 дней и 11 дней.

Что касается **задач на части**, то их решение предполагает умение обращаться с отношениями и пропорциями. Напомним, что если говорится, что две величины относятся, например, как $2:3$, то это означает, что одну из величин можно записать как $2x$, другую как $3x$, где x — одна часть чего-либо, $2x$ — две части, $3x$ — три части. Пропорция — это равенство отношений, например, $2:3 = 4:6$ (можно записать $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$). Пропорция обладает свойством равенства произведений крайних и средних членов, что можно с успехом использовать в решении уравнений. Например, если $\frac{2}{x} = \frac{x}{x+12}$, то можно при соблюдении ограничений написать $x^2 = 2(x+12) \Rightarrow x^2 - 2x - 24 = 0 \Rightarrow x_1 = -4$ и $x_2 = 6$.

14. Заработные платы рабочего за октябрь и ноябрь относились как $\frac{3}{2} : \frac{4}{3}$, а за ноябрь и декабрь как $2 : \frac{8}{3}$. За декабрь он получил на 150 рублей больше, чем за октябрь, и к окончанию работы рабочему выделили премию в размере 20% от его трехмесячного заработка. Найти размер премии.

Решение. Допустим, рабочий получил в октябре $\frac{3}{2}x$ рублей, а в ноябре $\frac{4}{3}x$ рублей; аналогично в ноябре $2y$ рублей, а в декабре $\frac{8}{3}y$ рублей. Тогда из условий:

$$\begin{cases} \frac{4}{3}x = 2y, \\ \frac{8}{3}y - \frac{3}{2}x = 150 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{3}x, \\ \frac{16}{9}x - \frac{3}{2}x = 150. \end{cases}$$

$$\frac{5}{18}x = 150 \Rightarrow x = 540.$$

В октябре рабочий получил $\frac{3}{2} \cdot 540 = 810$ руб., в ноябре $\frac{4}{3} \cdot 540 = 720$ руб., в декабре $\frac{16}{9} \cdot 540 = 960$ руб. Всего он заработал за 3 месяца 2490 рублей. Премия составляет $\frac{20}{100} \cdot 2490 = 498$ рублей.

Ответ: премия 498 рублей.

15. Охотничий порох состоит из селитры, серы и угля. Масса серы должна относиться к массе селитры как 0,2 : 1,3, а масса угля должна составлять $11\frac{1}{9}\%$ массы серы и селитры вместе. Сколько пойдет каждого из веществ на приготовление 25 кг пороха?

Решение. Если x кг — 1 часть, то масса серы $0{,}2x$ кг, масса селитры $1{,}3x$ кг, масса угля $11\frac{1}{9}\%(0{,}2x + 1{,}3)$ кг. Составим уравнение:

$$0{,}2x + 1{,}3x + \frac{100}{9 \cdot 100} \cdot 1{,}5x = 25;$$

$$1{,}5x\left(1+\frac{1}{9}\right)=25 \Leftrightarrow 1{,}5x\cdot\frac{10}{9}=25 \Leftrightarrow 15x=225 \Leftrightarrow x=15.$$

Таким образом масса серы $15\cdot 0{,}2=3$ кг, масса селитры $15\cdot 1{,}3=19{,}5$ кг и масса угля $25-22{,}5=2{,}5$ кг.

Ответ: 3 кг; 19,5 кг и 2,5 кг.

16. Автомобиль выехал, имея на борту груз, составляющий $\frac{4}{5}$ его грузоподъемности. На 1-й остановке он выгрузил $\frac{1}{6}$ часть груза, а на 2-й взял на борт $\frac{1}{3}$ своей грузоподъемности, на 3-й остановке выгрузил $\frac{2}{3}$ привезенного груза. В результате в пункт прибытия он привез 5 тонн. Какова грузоподъемность автомобиля?

Решение. Пусть грузоподъемность автомобиля x тонн. Тогда первоначальный груз был $\frac{4}{5}x$ тонн. Запишем последовательно известные из задачи соотношения:

$$\frac{4}{5}x-\frac{1}{6}\frac{4}{5}x+\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\left(\frac{4}{5}x-\frac{1}{6}\frac{4}{5}x+\frac{1}{3}x\right)=5;$$

$$x\left(\frac{4}{5}-\frac{2}{15}+\frac{1}{3}\right)-x\frac{2}{3}\left(\frac{4}{5}-\frac{2}{15}+\frac{1}{3}\right)=5 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x\frac{12-2+5}{15}=$$
$$=5 \Leftrightarrow x=15.$$

Ответ: грузоподъемность 15 тонн.

Для успешного решения **задач на числа** нужно знать о системах счисления, в частности о десятеричной системе счисления. Всем хорошо известно, что те числа, которыми мы постоянно пользуемся, состоят из 10 цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, и величина числа зависит от места (позиции) цифры в числе. Это означает, что мы используем десятеричную позиционную систему счисления. Каждое число в этой системе счисления представляется как $a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1}+\ldots+a_0 10^0$. Так, $375 = 3\cdot 10^2+7\cdot 10^1+5\cdot 10^0$. В n-значном числе старшая степень 10 равна $(n-1)$. Это видно в предыдущем примере. Еще пример: $1754 = 1\cdot 10^3+7\cdot 10^2+5\cdot 10^1+4\cdot 10^0 = 1000+700+50+4$. При записи числа, когда цифры обозначены буквами, используется черта сверху, например, $\overline{xy}$.

17. Сумма квадратов цифр положительного двузначного числа равна 13. Если из этого числа вычесть 9, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти число.

Решение. Пусть цифры двузначного числа a и b, а само число $\overline{ab}$. Это значит, что число можно записать как $10a+b$.

Из условий:

$$\begin{cases} a^2+b^2=13, \\ 10a+b-9=10b+a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=13, \\ 9a-9b=9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=13, \\ a=b+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+1, \\ 2b^2+2b+1=13 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=b+1, \\ 2b^2+2b-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+1, \\ b^2+b-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+1, \\ b_1=-3,\, b_2=2. \end{cases}$$

$a=3$; $b=2$ ($b=-3$ не имеет смысла).

Ответ: число 32.

18. Задумано целое положительное число. К его записи присоединили справа цифру 5 и из полученного нового числа вычли квадрат задуманного числа. Разность разделили на задуманное число, а затем вычли задуманное число и в результате получили единицу. Какое число было задумано?

Решение. Допустим, задумали число $x>0$. При присоединении справа 5-ти, число увеличилось в 10 раз из-за сдвига позиций и на 5 единиц, т. е. стало $10x+5$. Из условий: $\dfrac{10x+5-x^2}{x}-x=1$; $10x+5-2x^2=x \Leftrightarrow 2x^2-9x-5=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x_{1,\,2}=\dfrac{9\pm\sqrt{81+20}}{4} \Leftrightarrow x_{1,\,2}=\dfrac{9\pm 11}{4} \Leftrightarrow x=5$, т. к. $x>0$ и целое.

Ответ: задумано число 5.

19. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 3 и в остатке 7. Если взять сумму квадратов цифр этого числа и вычесть из нее произведение тех же цифр, то получится первоначальное число. Найти это число.

Решение. Пусть имеется двузначное число $\overline{xy}$. Из условий получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{10x+y}{x+y}=3+\dfrac{7}{x+y}, \\ x^2+y^2-xy=10x+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x+y=3x+3y+7, \\ x^2+y^2-xy=10x+y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x-2y=7, \\ x^2+y^2-xy=10x+y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{7x-7}{2}, \\ x^2+\dfrac{(7x-7)^2}{4}-x\dfrac{7x-7}{2}=10x+\dfrac{7x-7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{7x-7}{2}, \\ x^2 + \dfrac{49}{4}(x^2 - 2x + 1) - \dfrac{7}{2}(x^2 - x) = 10x + \dfrac{7}{2}(x-1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{7x-7}{2}, \\ x^2\left(1 + \dfrac{49}{4} - \dfrac{7}{2}\right) + x\left(-\dfrac{49}{2} + \cancel{\dfrac{7}{2}} - 10 - \cancel{\dfrac{7}{2}}\right) + \dfrac{49}{4} + \dfrac{7}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{7x-7}{2}, \\ x^2\dfrac{39}{4} + x\left(-\dfrac{69}{2}\right) + \dfrac{63}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{7x-7}{2}, \\ 39x^2 - 138x + 63 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{7x-7}{2}, \\ 13x^2 - 46x + 21 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{7x-7}{x}, \\ x_{1,\,2} = \dfrac{23 \pm \sqrt{529-273}}{13} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{7x-7}{2}, \\ x_1 = 3 \text{ и } x_2 = \dfrac{7}{13}. \end{cases}$$

Т. к. x — цифра, то $x = 3$ и $y = 7$.

Ответ: число 37.

Задачи с целочисленными неизвестными отличаются тем, что в ответе должны получиться целые числа. Либо это оговаривается в условии, либо соответствует смыслу задачи. При этом задача может не иметь общего однозначного решения и только то, что ответ должен быть целочисленным, помогает найти окончательное решение. Чаще всего при решении таких задач используется свойство делимости, т. е. если при делении одного выражения на другое должно получиться целое число, то приходится подбирать такие значения неизвестных, которые обеспечивают деление без остатка.

20. Найдите все пары натуральных чисел, разность квадратов которых равна 55.

Решение. По условию $x^2 - y^2 = 55$, где x и y — искомые числа, $x > y$.

$(x+y)(x-y) = 55$.

Число 55 может быть представлено в виде двух сомножителей: либо как $55 \cdot 1$, либо как $11 \cdot 5$, других возможностей нет. Т. к. $(x+y)$ — натуральное число и $(x-y)$ — натуральное, то рассматриваются два случая:

$$1)\ \begin{cases} x + y = 55, \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 56, \\ y = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 28, \\ y = 27. \end{cases}$$

2) $\begin{cases} x+y=11, \\ x-y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=16, \\ y=x-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8, \\ y=3. \end{cases}$

Ответ: 8 и 3; 28 и 27.

21. В автогонках принимают участие команды, имеющие одинаковое число автомобилей марки I и II, причем в каждой команде число всех автомобилей меньше 7. Если в каждой команде число автомобилей марки I оставить без изменения, а число автомобилей марки II увеличить в 3 раза, то общее число автомобилей марки II, участвующих в гонках, будет на 50 больше общего числа автомобилей марки I, а число автомобилей в каждой команде превысит 12. Определить число команд, участвующих в гонках, и число автомобилей марки I и II в каждой команде.

Решение. Обозначим число команд k, а число автомобилей марки I и II в каждой команде — m и n соответственно. Условия задачи приводим к соотношениям:

$$\begin{cases} m+n<7, \\ 3nk-mk=50, \\ m+3n>12. \end{cases}$$

Займемся сначала неравенствами.

Из 1-го неравенства и условия задачи получаем $2 \leqslant m+n \leqslant 6$ и $n<6$.

3-е неравенство запишем в виде:

$(m+n)+2n>12 \Leftrightarrow n>6-\dfrac{m+n}{2}$.

С учетом предыдущих неравенств получаем из последнего неравенства $3<n<6$. Следовательно, $n=4$ или $n=5$.

Рассмотрим возможные случаи:

1) $n=4$, $m=1$ и $12k-k=50 \Leftrightarrow 11k=50$, что невозможно, т. к. k — целое число;

2) $n=4$, $m=2$ и $12k-2k=50 \Leftrightarrow 10k=50 \Leftrightarrow k=5$;

3) $n=5$, $m=1$ и $15k-k=50 \Leftrightarrow 14k=50$, что невозможно, т. к. k — целое число.

Итак, единственно возможный 2-й случай.

Ответ: число команд 5, в командах 2 автомобиля марки I и 4 автомобиля марки II.

Последний пример иллюстрирует не только решение задачи с целыми числами, но использование неравенств в условии и решении задачи.

22. Было куплено несколько одинаковых тетрадей и одинаковых книг, причем книг куплено на 4 больше, чем тетрадей. За все тетради заплачено 7 руб. 20 коп., за все книги 66 рублей. Если бы тетрадь стоила столько, сколько стоит книга, а книга — столько, сколько стоит тетрадь, то было бы истрачено меньше, чем 44 руб. 40 коп. Сколько куплено тетрадей?

Решение. Пусть куплено n книг и m тетрадей; книга стоит x руб., тетрадь — y руб. Тогда, исходя из условий, можно написать:

$$\begin{cases} n-m=4, \\ nx=66, \\ my=7{,}2, \\ mx+ny<44{,}4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=m+4, \\ x=\dfrac{66}{n}, \\ y=\dfrac{7{,}2}{m}, \\ mx+ny<44{,}4. \end{cases}$$

Подставим 3 первых равенства в неравенство:

$m\dfrac{66}{m+n}+(m+4)\dfrac{7{,}2}{m}<44{,}4 \Rightarrow 66\dfrac{m}{m+4}+7{,}2\dfrac{m+4}{m}<44{,}4$; обозначим $\dfrac{m+4}{m}=a$, $7{,}2a+66\dfrac{1}{a}<44{,}4 \Rightarrow 72a^2-444a+660<$ <0.

$a_{1,\,2}=\dfrac{37\pm\sqrt{1369-1320}}{12}=\dfrac{37\pm 7}{12} \Rightarrow a_1=2{,}5$ и $a_2=3\dfrac{2}{3} \Rightarrow$ $\Rightarrow 2\dfrac{1}{2}<a<3\dfrac{2}{3}$.

$2\dfrac{1}{2}<\dfrac{m+4}{m}<3\dfrac{2}{3} \Rightarrow 2\dfrac{1}{2}<1+\dfrac{4}{m}<3\dfrac{2}{3} \Rightarrow 1\dfrac{1}{2}<\dfrac{4}{m}<2\dfrac{2}{3}$; m — натуральное число, и здесь подходит только $m=2$.

Ответ: куплено 2 тетради.

Решение текстовых задач

ЗАДАЧИ, СВЯЗАННЫЕ С ПОНЯТИЯМИ «КОНЦЕНТРАЦИЯ» И «ПРОЦЕНТНОЕ СОДЕРЖАНИЕ»

1. 18%-ный раствор соли массой 2 кг разбавили стаканом воды массой 0,25 кг. Какой концентрации раствор в процентах получится?

Решение. Найдем, сколько соли находится в 2 кг раствора: $\frac{2 \cdot 18}{100} = 0{,}36$ (кг). После добавления воды получили раствор массой $2 + 0{,}25 = 2{,}25$ (кг). Новая концентрация раствора:

$$\frac{0{,}36}{2{,}25} \cdot 100\% = 16\%.$$

Ответ: 16%.

2. Товар A до уценки стоил в 1,4 раза дороже, чем товар B. Товар A был уценен на 15%, а товар B — на 30%. Во сколько раз товар A стал дороже товара B после уценки?

Решение. Пусть товар B стоил до уценки x рублей, тогда товар A стоил до уценки $1{,}4x$ рублей. После уценки товар A стал стоить $1{,}4x - 1{,}4x\frac{15}{100}$ (руб.), а товар B — $x - \frac{30}{100}x$ (руб.). Найдем отношение новых цен товаров:

$$\frac{1{,}4x\left(1 - \frac{15}{100}\right)}{x\left(1 - \frac{30}{100}\right)} = \frac{1{,}4x\left(1 - \frac{3}{20}\right)}{x\left(1 - \frac{3}{10}\right)} = \frac{1{,}4 \cdot 17 \cdot 10}{20 \cdot 7} = 1{,}7.$$

Ответ: в 1,7 раза.

3. При выпаривании из 8 кг рассола получили 2 кг пищевой соли, содержащей 10% воды. Каков процент содержания воды в рассоле?

Решение. Пусть в рассоле содержится $x\%$ воды, тогда это составляет $8 \cdot \frac{x}{100}$ кг воды, т. е. $0{,}08$ кг воды. При этом чистой соли в растворе $8 - 0{,}08x$ (кг). В 2 кг соли $2 \cdot \frac{10}{100} = 0{,}2$ кг воды, т. е. чистой соли $2-0{,}2=1{,}8$ (кг). Получаем $8-0{,}08x=1{,}8\Rightarrow$ $\Rightarrow 0{,}08x=6{,}2\Rightarrow x=77{,}5\%$.

Ответ: 77,5%.

4. Сумма двух чисел равна 24. Найти меньшее из них, если 35% одного равны 85% другого.

Решение. Пусть одно из чисел x, тогда другое $24-x$. Получаем $\frac{35}{100}x=\frac{85}{100}(24-x)$. Решаем уравнение:

$$35x=2040-85x\Rightarrow 120x=2040\Rightarrow x=17;\ 24-17=7.$$

Ответ: меньшее из чисел 7.

5. Завод увеличивал объем выпускаемой продукции ежегодно на одно и то же число процентов. Найти это число, если за два года объем продукци увеличился на 21%.

Решение. Пусть каждый год объем продукции увеличивался на $x\%$, а первоначальный объем продукции A. Тогда через 1 год объем продукции стал $A+A\cdot\frac{x}{100}=A\left(1+\frac{x}{100}\right)$. Через 2 года: $A\left(1+\frac{x}{100}\right)+A\left(1+\frac{x}{100}\right)\frac{x}{100}=A\left(1+\frac{x}{100}\right)^2$.

Составляем уравнение:

$$A\left(1+\frac{x}{100}\right)^2=A+A\cdot\frac{21}{100}\Rightarrow\left(1+\frac{x}{100}\right)^2=1+\frac{21}{100}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(1+\frac{x}{100}\right)^2=\frac{121}{100}\Rightarrow 1+\frac{x}{100}=\frac{11}{10}\Rightarrow\frac{x}{100}=\frac{1}{10}\Rightarrow x=10\%.$$

Ответ: 10%.

6. Цену товара первоначально снизили на 20%, затем новую цену снизили еще на 30% и, наконец, еще на 50%. На сколько всего процентов снизили первоначальную цену?

Решение. Пусть первоначальная цена товара x рублей. После 1-го снижения товар стоил: $x-\frac{20}{100}x$, т. е. $0{,}8x$ руб. После 2-го снижения: $0{,}8x-0{,}8x\cdot\frac{30}{100}=0{,}8x(1-0{,}3)=0{,}8x\cdot 0{,}7=$ $=0{,}56x$ руб. После 3-го снижения: $0{,}56x-0{,}56x\frac{10}{100}=0{,}56x\times$ $\times 0{,}5=0{,}28x$ руб.

Итак, цена уменьшилась на $x-0{,}28x=0{,}72x$ руб., что составляет 72% от первоначальной цены.

Ответ: 72%.

7. Имеется руда двух типов: с содержанием меди 6% и 11%. Сколько руды с меньшим содержанием меди надо взять, чтобы при смешивании с другой рудой получить 20 тонн руды с содержанием меди 8%?

Решение. Допустим, нужно взять x тонн более бедной руды и $(20 - x)$ тонн более богатой руды. Тогда

$$x \cdot \frac{6}{100} + (20 - x)\frac{11}{100} = 20 \cdot \frac{8}{100} \Rightarrow 6x + 220 - 11x = 160 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 5x = 60 \Rightarrow x = 12 \text{ т.}$$

Ответ: нужно взять 12 т бедной руды.

8. Имеются два куска сплава меди и цинка с процентным содержанием меди 20 и 30% соответственно. В каком отношении нужно взять эти сплавы, чтобы, переплавив взятые куски вместе, получить сплав, содержащий 26% меди?

Решение. Если 1-го сплава взять x кг, а 2-го y кг, то меди в них будет соответственно $0{,}2x$ кг и $0{,}3y$ кг. Сплавленные вместе, они будут весить $(x + y)$ кг, и меди в новом куске будет $(0{,}2x + 0{,}3y)$ кг. Поэтому

$$\frac{0{,}2x + 0{,}3y}{x + y} = 0{,}26 \Rightarrow 0{,}2x + 0{,}3y = 0{,}26x + 0{,}26y \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0{,}06x = 0{,}04y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{2}{3}.$$

Ответ: в отношении 2 : 3.

9. Выработка продукции за год работы предприятия возросла на 4%. На следующий год она увеличилась на 8%. Определить средний ежегодный прирост продукции за этот период.

Решение. Пусть средний прирост $x\%$, тогда если первоначальная продукция A, то через 2 года стало:

$$\left(A + \frac{4}{100}A\right) + \left(A + \frac{4}{100}A\right) \cdot \frac{8}{100} = \left(A + \frac{x}{100}A\right) +$$
$$+ \left(A + \frac{x}{100}A\right)\frac{x}{100} \Rightarrow \left(1 + \frac{4}{100}\right)\left(1 + \frac{8}{100}\right) = \left(1 + \frac{x}{100}\right)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1{,}04 \cdot 1{,}08 = \left(1 + \frac{x}{100}\right)^2 \Rightarrow x \approx 5{,}98.$$

Ответ: средний ежегодный прирост около 6%.

10. В сосуд налито 4 литра 70%-го раствора серной кислоты. Во второй такой сосуд налито 3 литра 90%-го раствора серной кислоты. Сколько литров раствор нужно перелить из второго сосуда в первый, чтобы в нем получился 74%-й раствор серной кислоты? Емкости сосудов не менее 7 литров.

Решение. Допустим, нужно перелить x л раствора из 2-го сосуда в 1-й. В 1-м сосуде $4 \cdot \dfrac{70}{100}$ л чистой серной кислоты, в x

литрах из 2-го сосуда $x \cdot \frac{90}{100}$ л чистой серной кислоты, тогда в 1-м сосуде будет $(4+x) \cdot \frac{74}{100}$ чистой серной кислоты. Следовательно: $4 \cdot \frac{70}{100} + x \cdot \frac{90}{100} = (4+x)\frac{74}{100} \Rightarrow 280 + 90x = 296 + 74x \Rightarrow 16x = 16 \Rightarrow x = 1$.

Ответ: нужно перелить 1 литр раствора.

11. Цена на товар была повышена на 25%. На сколько процентов надо после этого ее снизить, чтобы получить первоначальную цену товара?

Решение. Пусть x — первоначальная цена товара, тогда $x + \frac{25}{100}x$ — повышенная цена. Пусть новую цену нужно снизить на y%. Запишем уравнение:

$$x + \frac{1}{4}x - \left(x + \frac{1}{4}x\right)\frac{y}{100} = x.$$

$$\frac{5}{4}x - \frac{5}{4}x\frac{y}{100} = x \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{y}{80} \Rightarrow y = 20\%.$$

Ответ: 20%.

12. Руда содержит 40% примесей, а выплавленный из нее металл содержит 4% примесей. Сколько получится металла из 24 т руды?

Решение. Руда без примесей составляет: $24 - 0{,}4 \cdot 24 = 14{,}4$ т. Если x т — количество металла из 24 т руды, то $14{,}4 = x - 0{,}04x \Rightarrow x = \frac{14{,}4}{0{,}96} \Rightarrow x = 15$ т.

Ответ: 15 тонн металла.

13. Ежегодный прирост населения города составляет 20%. Через сколько лет население города удвоится?

Решение. Пусть A чел. — население города в некоторый момент времени. Тогда через 1 год население составит: $A + 0{,}2A = 1{,}2A$.

Через 2 года: $1{,}2A + 1{,}2A \cdot 0{,}2 = 1{,}2^2 A$.

Через 3 года: $1{,}2^2 A + 1{,}2^2 A \cdot 0{,}2 = 1{,}2^3 A$.

Через n лет: $1{,}2^n A$.

По условию: $1{,}2^n A = 2A \Rightarrow 1{,}2^n = 2$. $n \approx 4$.

Ответ: население города удвоится через 4 года.

14. Выработка продукции за год работы предприятия возросла на 8%, а за следующий год она увеличилась на 47%. Найти средний годовой прирост продукции за этот период.

Решение. Пусть A — первоначальный объем продукции, тогда через год: $A + 0{,}08A = 1{,}08A$. Через 2 года: $1{,}08A + 0{,}47 \times \times 1{,}08A = 1{,}5876A$. Если $\frac{x}{100}$ — средний годовой прирост продукции, то через 1 год объем продукции $A + xA$, через 2 года $(1 + x)^2 A$. Из условия

$(1 + x)^2 A = 1{,}5876A \Rightarrow (1 + x)^2 = 1{,}5876 \Rightarrow 1 + x = 1{,}26 \Rightarrow \Rightarrow x = 0{,}26$

$0{,}26 \cdot 100\% = 26\%$.

Ответ: средний годовой прирост продукции 26%.

15. Имеются два сплава, состоящие из цинка, меди и олова. Известно, что 1-й сплав содержит 40% олова, а 2-й — 26% меди. Процентное содержание цинка в 1-м и 2-м сплавах одинаково. Сплавив 150 кг первого сплава и 250 кг второго, получили новый сплав, в котором оказалось 30% цинка. Определить, сколько олова содержится в новом сплаве.

Решение. Составим таблицу:

	I сплав	II сплав
Цинк	x	x
Медь	$1 - x - 0{,}4 = 0{,}6 - x$	$26\% = 0{,}26$
Олово	$40\% = 0{,}4$	$1 - x - 0{,}26 = 0{,}74 - x$

Это таблица процентного, или долевого содержания 3-х компонентов в 2-х сплавах. В 150 кг 1-го сплава $150x$ кг цинка, в 250 кг 2-го сплава $250x$ кг цинка. Поэтому в новом сплаве $400x$ кг цинка. По условию $400x = 400 \cdot 0{,}3 \Rightarrow x = 0{,}3$.

Олова в 150 кг 1-го сплава $150 \cdot 0{,}4$ кг, в 250 кг 2-го сплава $250(0{,}74 - 0{,}3)$.

$150 \cdot 0{,}4 + 250 \cdot 0{,}44 = 60 + 110 = 170$ кг.

Ответ: 170 кг.

16. Имеются 2 слитка золота с серебром. Процентное содержание золота в 1-м слитке в 2,5 раза больше, чем процентное содержание золота во 2-м слитке. Если сплавить оба слитка вместе, то получится слиток, в котором будет 40% золота. Найти, во сколько раз 1-й слиток тяжелее второго, если известно, что при сплавлении равных по весу частей первого и второго слитков получается слиток, в котором содержится 35% золота.

Решение. Допустим, первый слиток весит x кг и содержит $2{,}5k$ частей золота, второй слиток весит y кг и содержит k частей золота. Тогда новый слиток весит $(x+y)$ кг и содержит 0,4 части золота. Имеем уравнения:

$$\begin{cases} 2{,}5kx+ky=0{,}4(x+y), \\ 2{,}5kx+kx=0{,}35\cdot 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3{,}5kx=0{,}7, \\ 2{,}5kx+ky=0{,}4x+0{,}4y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k=0{,}2, \\ 0{,}5x+0{,}2y=0{,}4x+0{,}4y \end{cases} \Leftrightarrow 0{,}1x=0{,}2y \Leftrightarrow \frac{x}{y}=2.$$

Ответ: 1-й слиток тяжелее 2-го в 2 раза.

17. Известно, что вклад, находящийся в банке с начала года, возрастает к концу года на определенный процент (свой для каждого банка). В начале года $\frac{3}{5}$ некоторого количества денег положили в 1-й банк, а оставшуюся часть во 2-й банк. К концу года сумма этих вкладов стала равна 590 денежным единицам, к концу следующего года 701 денежной единице. Было подсчитано, что если бы первоначально $\frac{3}{5}$ исходного количества денег положили во 2-й банк, а оставшуюся часть в 1-й банк, то по истечении одного года сумма вкладов в эти банки стала бы равной 610 денежным единицам. Какова в этом случае была бы сумма вкладов в эти банки к концу второго года?

Решение. Пусть A — общая первоначальная сумма денег. $\frac{3}{5}A$ положили в 1-й банк, $\frac{2}{5}A$ — 2-й банк; $x\%$ и $y\%$ — соответствующие процентные ставки 1-го и 2-го банков. Тогда из условий получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{3}{5}A\left(1+\frac{x}{100}\right)+\frac{2}{5}A\left(1+\frac{y}{100}\right)=590, \\ \frac{3}{5}A\left(1+\frac{x}{100}\right)^2+\frac{2}{5}A\left(1+\frac{y}{100}\right)^2=801, \\ \frac{2}{5}A\left(1+\frac{x}{100}\right)+\frac{3}{5}A\left(1+\frac{y}{100}\right)=610. \end{cases}$$

Нужно определить

$$\frac{2}{5}A\left(1+\frac{x}{100}\right)^2+\frac{3}{5}A\left(1+\frac{y}{100}\right)^2.$$

При решении системы примем:

$$1+\frac{x}{100}=a;\ 1+\frac{y}{100}=b;\ \frac{5}{A}=k \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+2b=590k, \\ 2a+3b=610k, \\ 3a^2+2b^2=701k \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b-a=20k, \\ b+a=240k, \\ 3a^2+2b^2=701k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=110k, \\ b=130k, \\ 3\cdot 12100k^2+2\cdot 16900k^2=701k \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=110k, \\ b=130k, \\ k=\dfrac{1}{100} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1{,}1, \\ b=1{,}3, \\ A=500. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{5}\cdot 500\cdot 1{,}1^2+\frac{3}{5}\cdot 500\cdot 1{,}3^2=242+507=749.$$

Ответ: сумма вкладов равнялась бы 749 денежным единицам.

18. Свежие фрукты содержат 72% воды, а сухие 20%. Сколько сухих фруктов получится из 20 кг свежих фруктов?

Решение. В 20 кг свежих фруктов содержится $20\cdot\dfrac{72}{100}=$ $=14{,}4$ кг воды, а, значит, сухого вещества $20-14{,}4=5{,}6$ кг. Допустим, из 20 кг свежих фруктов получится x кг сухих фруктов. Тогда в них $x\cdot\dfrac{20}{100}=\dfrac{x}{5}$ кг воды и сухого вещества $x-\dfrac{x}{5}=\dfrac{4}{5}x$ кг.

$0{,}8x=5{,}6\Rightarrow x=7$ кг.

Ответ: 7 кг сухих фруктов.

19. Имеются два раствора серной кислоты в воде: 1-й — 40%-й, а 2-й — 60%-й. Эти два раствора смешали, после чего добавили 5 кг чистой воды и получили 20%-й раствор. Если бы всесто 5 кг чистой воды добавили 5 кг 80%-го раствора, то получился бы 70%-й раствор. Сколько было 70%-го и 60%-го растворов?

Решение.

x кг	y кг
40%	60%
H_2SO_4	H_2SO_4

В 1-м растворе $x\cdot\dfrac{40}{100}$ чистой кислоты, во 2-м растворе $y\cdot\dfrac{60}{100}$ чистой кислоты, из первого условия получаем

$$\frac{40x}{100}+\frac{60y}{100}=\frac{(x+y+5)\cdot 20}{100}.$$

В 5 кг 80%-го раствора $\dfrac{5\cdot 80}{100}$ чистой серной кислоты, поэтому из второго условия получаем

$$\frac{40x}{100}+\frac{60y}{100}+\frac{5\cdot 80}{100}=\frac{(x+y+5)\cdot 70}{100}.$$

Имеем систему:

$$\begin{cases} 40x+60y=20x+20y+100, \\ 40x+60y+400=70x+70y+350 \end{cases} \Leftrightarrow - \begin{cases} x+2y=5, \\ 3x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y-2x=0, \\ x+2y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x, \\ 5x=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=2. \end{cases}$$

Ответ: 1 кг 40%-го раствора и 2 кг 60%-го раствора.

20. Сплавляя два одинаковых по весу куска чугуна с разным содержанием хрома, получили сплав, в котором содержалось 12 кг хрома. Если бы 1-й кусок был в 2 раза тяжелее, то в сплаве содержалось бы 16 кг хрома. Известно, что содержание хрома в 1-м куске на 5% меньше, чем во 2-м. Найти процентное содержание хрома в кажом куске чугуна.

Решение. Если вес каждого куска чугуна A кг, а содержание хрома в 1-м куске x%, а во 2-м — y%, то получим систему:

$$\begin{cases} A\cdot\dfrac{x}{100}+A\cdot\dfrac{y}{100}=12, \\ 2A\cdot\dfrac{x}{100}+A\cdot\dfrac{y}{100}=16 \\ y-x=5 \end{cases} \Leftrightarrow \quad : \begin{cases} A(x+y)=1200, \\ A(2x+y)=1600, \\ x=y-5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x+y}{x+y}=\dfrac{4}{3}, \\ x=y-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2y-10+y}{y-5+y}=\dfrac{4}{3}, \\ x=y-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3y-10}{2y-5}=\dfrac{4}{3}, \\ x=y-5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9y-30=8y-20, \\ x=y-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=10, \\ x=5. \end{cases}$$

Ответ: в 1-м куске 5% хрома, во 2-м — 10% хрома.

21. Имеются два бака: 1-й бак наполнен чистым глицерином, 2-й бак — водой. Взяли 2 трехлитровых ковша, зачерпнули 1-м ковшом глицерин из 1-го бака, а 2-м ковшом — воду из 2-го бака, после чего 1-й ковш влили во 2-й бак, а 2-й ковш — в 1-й бак. Затем после перемешивания снова зачерпнули 1-м ковшом смесь из 1-го бака, а 2-м ковшом — смесь из 2-го бака и влили 1-й ковш во 2-й бак, а 2-й ковш в 1-й бак. В результате половину объема 1-го бака занял чистый глицерин. Найти объемы баков, если известно, что их суммарный объем в 10 раз больше объема 1-го бака.

Решение.	I бак	II бак
	x л	y л
	глицерин	вода

$x+y=10x \Rightarrow y=9x.$

На 1-м этапе в I баке осталось $x-3$ л глицерина, во II баке стало 3 л глицерина.

На 2-м этапе из I бака взяли $3\dfrac{x-3}{x}$ л глицерина, т. к. доля глицерина в I баке $\dfrac{x-3}{x}$. В I бак добавили $3\cdot\dfrac{3}{y}$ л глицерина, т. к. доля глицерина во II баке $\dfrac{3}{y}$.

По условию

$(x-3)-\dfrac{(x-3)\cdot 3}{x}+\dfrac{3\cdot 3}{y}=\dfrac{2}{x}$.

Получаем систему:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-3x-3x+9}{x}+\dfrac{9}{y}=\dfrac{x}{2}, \\ y=9x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-12x+20=0, \\ y=9x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=10;\ x_2=2 \text{ (не подходит, т. к. } 2<3), \\ y=90. \end{cases}$$

Ответ: 10 литров и 90 литров.

22. Для приготовления смеси из двух жидкостей A и B были взяты два сосуда емкостью по 15 л каждый, в которых находилось всего 15 л жидкости A. Затем 1-й сосуд доверху долили жидкостью B, и было произведено перемешивание. После этого 2-й сосуд дополнили доверху смесью из 1-го сосуда. Затем из второго сосуда отлили в 1-й 6 л получившейся смеси. После этого в 1-м сосуде оказалось жидкости A на 1 л больше, чем во 2-м. Сколько литров жидкости A было первоначально во 2-м сосуде?

Решение.

	15 л	15 л
	x л A	y л A
	I сосуд	II сосуд

Пусть в I-м сосуде x л жидкости A, а во II-м сосуде y л жидкости A, причем из условия $x+y=15$.

В I-й сосуд долили $(15-x)$ л жидкости B. Доля жидкости A в I-м сосуде $\dfrac{x}{15}$; доля жидкости B в I-м сосуде $\dfrac{15-x}{15}$. $(15-$ $-\,y)$ л смеси взяли из I-го сосуда; в этой смеси $(15-y)\dfrac{x}{15}$ л жидкости A. Во II-м сосуде стало $y+(15-y)\dfrac{x}{15}$ л жидкости A; доля жидкости A во II-м сосуде $\dfrac{y+(15-y)\frac{x}{15}}{15}$.

В 6 л $6\dfrac{y+(15-y)\frac{x}{15}}{15}$ л жидкости A.

В I-м сосуде перед добавлением 6 л было $15-(15-y)=y$ л, в них жидкости A $y\cdot\dfrac{x}{15}$ л.

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} y\dfrac{x}{15}+6\dfrac{y+(15-y)\frac{x}{15}}{15}=9\dfrac{y+(15-y)\frac{x}{15}}{15}+1, \\ x+y=15 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=15-y, \\ \dfrac{y(15-y)}{15}=\dfrac{y+(15-y)\frac{(15-y)}{15}}{5}+1 \end{cases}$$

$$15y-y^2=3y+\frac{(15-y)^2}{5}+15 \Rightarrow 12y-y^2-15=$$

$$=\frac{225-30y+y^2}{5} \Rightarrow 60y-5y^2-75-225+30y-y^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6y^2-90y+300=0 \Rightarrow y^2-15y+50=0 \Rightarrow y_1=5 \text{ и } y_2=10.$$

$y=10$ не подходит, т. к. $10+6=16>15$, что невозможно.

Ответ: во II-м сосуде было 5 л жидкости A.

ЗАДАЧИ НА ДВИЖЕНИЕ

1. Стрекоза и муха двигаются по прямой. Стрекоза догоняет муху, их скорости равны 1,2 м/с и 0,3 м/с. Через сколько секунд расстояние между насекомыми сократится с 6,5 м до 20 см?

Решение. Скорость сближения стрекозы и мухи равна разности их скоростей:

1,2 м/с – 0,3 м/с = 0,9 м/с.

Расстояние, которое нужно преодолеть с этой скоростью, равно $6{,}5-0{,}2=6{,}3$ м. Следовательно, время равно 6,3 м : 0,9 м/с = 7 с.

Ответ: 7 с.

2. Из двух сел одновременно навстречу друг другу выехали автобус и грузовик. Через 0,5 ч они встретились. Какое расстояние между селами, если скорость автобуса 60, а грузовика 48 км/ч?

Решение. Скорость сближения автобуса и грузовика: $60+48=108$ км/ч. Они ехали 0,5 ч, следовательно, расстояние между селами 108 км/ч · 0,5 ч = 54 км.

Ответ: расстояние 54 км.

3. Катер прошел расстояние между пристанями по течению реки за 2 часа, а обратно против течения за 3 часа. Найти собственную скорость катера, если скорость течения реки 2 км/ч.

Решение. Пусть собственная скорость катера x км/ч. Тогда его скорость по течению $(x+2)$, а против течения $(x-2)$ км/ч. Приравняем расстояния: $(x+2)\cdot 2 = (x-2)\cdot 3$.

$2x + 4 = 3x - 6 \Rightarrow x = 10$ км/ч.

Ответ: собственная скорость катера 10 км/ч.

4. Пассажирский поезд проходит за 3 часа на 10 км больше, чем товарный за 4 часа. Скорость товарного поезда на 20 км/ч меньше скорости пассажирского. Найти скорость пассажирского поезда.

Решение. Пусть искомая скорость x, тогда скорость товарного поезда $(x-20)$ км/ч. За 3 часа пассажирский поезд проходит $3x$, а товарный за 4 часа $4(x-20)$ км. Уравнение $3x - 4(x-20) = 10$.

$3x - 4x + 80 = 10 \Rightarrow x = 70$.

Ответ: скорость пассажирского поезда 70 км/ч.

5. Велосипедист и пешеход отправились из пунктов A и B, расстояние между которыми 12 км, и встретились через 20 мин. Пешеход прибыл в пункт A на 1 ч 36 мин позже, чем велосипедист в B. Найти скорость пешехода.

Решение. Пусть скорость пешехода x, а скорость велосипедиста y км/ч. Скорость их сближения $(x+y)$ км/ч, поэтому

$$\frac{12}{x+y} = \frac{20}{60}.$$

Время пешехода в пути $\frac{12}{x}$, время велосипедиста $\frac{12}{y}$ ч, поэтому

$$\frac{12}{x} - \frac{12}{y} = 1\frac{36}{60}.$$

Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{12}{x+y} = \dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{12}{x} - \dfrac{12}{y} = \dfrac{8}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 36, \\ \dfrac{3}{x} - \dfrac{3}{y} = \dfrac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 36 - x, \\ \dfrac{3}{x} - \dfrac{3}{36-x} = \dfrac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 36 - x, \\ \dfrac{108-6x}{36x-x^2} = \dfrac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 36 - x, \\ 5(54-3x) = 36x - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 36 - x, \\ x^2 - 51x + 270 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 36 - x, \\ x_{1,\,2} = \dfrac{51 \pm \sqrt{2601 - 1080}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 36 - x, \\ x_1 = 6;\, x_2 = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 30;\, y_2 = -9, \\ x_1 = 6;\, x_2 = 45. \end{cases}$$

Пара чисел (45; $-$ 9) не подходит, т. к. скорость считается положительной.

Ответ: скорость пешехода 6 км/ч.

6. Из пункта A в пункт B вышел товарный поезд. Спустя 3 ч вслед за ним вышел пассажирский поезд, скорость которого на 30 км/ч больше скорости товарного. Через 15 ч после своего выхода пассажирский поезд оказался впереди товарного на 300 км. Определить скорость товарного поезда.

Решение. Пусть скорость товарного поезда x, тогда скорость пассажирского поезда $(x + 30)$ км/ч. Товарный поезд шел 18 ч и прошел расстояние $18x$ км, пассажирский поезд шел 15 ч и прошел расстояние $15(x + 30)$ км. Получаем

$$15(x + 30) - 18x = 300 \Rightarrow 15x + 450 - 18x = 300 \Rightarrow x = 50.$$

Ответ: скорость товарного поезда 50 км/ч.

7. Путь от A до B автомобиль проезжает с определенной скоростью за 2,5 часа. Если он увеличит скорость на 20 км/ч, то за 2 ч проедет на 15 км больше, чем расстояние от A до B. Найти расстояние от A до B.

Решение. Пусть S км — расстояние от A до B. Тогда неувеличенная скорость автомобиля $\dfrac{S}{2{,}5}$, а увеличенная $\left(\dfrac{S}{2{,}5} + 20\right)$ км/ч. Получаем $\left(\dfrac{S}{2{,}5} + 20\right) \cdot 2 = S + 15$. Решаем уравнение:

$$(S + 50) \cdot 2 = 2{,}5S + 37{,}5 \Rightarrow 2S + 100 = 2{,}5S + 37{,}5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0{,}5S = 62{,}5 \Rightarrow S = 125 \text{ км}.$$

Ответ: расстояние AB равно 125 км.

8. Половину пути мотоциклист ехал с намеченной скоростью 45 км/ч, затем задержался на 10 мин и поэтому, чтобы наверстать время, увеличил скорость на 15 км/ч. Каков весь путь мотоциклиста?

Решение. Примем весь путь за x км. Тогда, если бы мотоциклист ехал с намеченной скоростью, он потратил бы времени $\dfrac{x}{45}$ ч, но реально время его движения: $\dfrac{x}{2 \cdot 45} + \dfrac{10}{60} + \dfrac{x}{2 \cdot (45 + 15)}$. Поэтому

$$\frac{x}{45}=\frac{x}{90}+\frac{1}{6}+\frac{x}{120}\Rightarrow x\left(\frac{1}{45}-\frac{1}{90}-\frac{1}{120}\right)=\frac{1}{6}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x\frac{8-4-3}{360}=\frac{1}{6}\Leftrightarrow\frac{x}{360}=\frac{1}{6}\Rightarrow x=60.$$

Ответ: путь мотоциклиста 60 км.

9. Расстояние между двумя пунктами поезд должен пройти за 10 часов. Пройдя первые 9 ч с намеченной скоростью, он снизил скорость на 7 км/ч и прибыл в конечный пункт с опозданием на 6 мин. Найти первоначальную скорость поезда.

Решение. Пусть первоначальная скорость поезда x км/ч. Тогда расстояние между пунктами $10x$ км. Поезд прошел сначала $9x$, затем $(x-7)\left(1+\frac{6}{60}\right)$ км. Таким образом,

$$10x=9x+(x-7)\cdot 1{,}1\Rightarrow x=1{,}1x-7{,}7\Rightarrow 0{,}1x=7{,}7\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=77.$$

Ответ: скорость поезда была 77 км/ч.

10. Велосипедист едет из одного города в другой со скоростью 10 км/ч. Если бы он ехал со скоростью 12 км/ч, то приехал бы в конечный пункт на 4 ч раньше. Какое расстояние преодолеет велосипедист?

Решение. Пусть расстояние между городами S км. Тогда при скорости 10 км/ч велосипедист затратит на поездку $\frac{S}{10}$, а при скорости 12 км/ч — $\frac{S}{12}$ часов.

Уравнение $\frac{S}{10}-\frac{S}{12}=4\Rightarrow\frac{6S-5S}{60}=4\Rightarrow S=240$ км.

Ответ: 240 км.

11. Из города A в город B выезжает велосипедист, а через 3 часа после его выезда из города B навстречу ему выезжает мотоциклист, скорость которого в 3 раза больше скорости велосипедиста. Велосипедист и мотоциклист встречаются посередине между A и B. Если бы мотоциклист выехал не через 3, а через 2 часа после велосипедиста, то встреча произошла бы на 15 км ближе к A. Найти расстояние между A и B.

Решение. Пусть расстояние AB равно S км, а скорость велосипедиста x км/ч. Тогда скорость мотоциклиста $3x$ км/ч; время t поездки в 1-м случае

$$t_1=\frac{S}{2x}\quad\text{и}\quad t_1-3=\frac{S}{2\cdot 3x}.$$

1-е уравнение: $\dfrac{S}{2x}=\dfrac{S}{6x}+3$.

Во 2-м случае

$$t_2=\frac{\frac{S}{2}-15}{x}\quad \text{и } t_2-2=\frac{\frac{S}{2}+15}{3x}.$$

2-е уравнение: $\dfrac{S-30}{2x}=\dfrac{S+30}{6x}+2$.

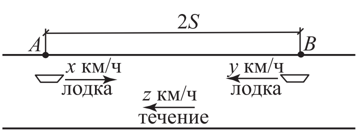
$$\begin{cases}\dfrac{S}{2x}-\dfrac{S}{6x}=3,\\ \dfrac{S-30}{2x}-\dfrac{S+30}{6x}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{3S-S}{6x}=3,\\ \dfrac{3S-90-S-30}{6x}=2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}S=9x,\\ S-60=6x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=20,\\ S=180.\end{cases}$$

Ответ: расстояние AB 180 км.

12. Города A и B расположены на берегу реки, причем город A расположен ниже по течению. Из этих городов одновременно навстречу друг другу выходят две лодки, которые встречаются посередине между городами A и B. Продолжив свой путь после встречи в прежних направлениях и достигнув соответственно городов B и A, лодки мгновенно поворачивают обратно и встречаются вновь на 20 км ближе к городу A. Если бы те же лодки, выйдя одновременно из A и B, поплыли обе против течения, то лодка из A догнала бы лодку из B в 150 км от B. Найти расстояние от A до B.

Решение.



Обозначим: x км/ч — собственная скорость лодки, вышедшей из A; y км/ч — собственная скорость лодки, вышедшей из B; z км/ч — скорость течения; $2S$ км — расстояние между A и B. Тогда 1-е условие дает соотношение:

$$\frac{S}{x-z}=\frac{S}{y+z}.$$

Из 2-го условия следует:

$$\frac{2S}{x-z}+\frac{S+20}{x+z}=\frac{2S}{y+z}+\frac{S-20}{y-z}.$$

И из 3-го условия следует:

$$\frac{2S+150}{x-z}=\frac{150}{y-z}.$$

$$\begin{cases} x-z=y+z, \\ \dfrac{S}{x-z}=75\left(\dfrac{1}{y-z}-\dfrac{1}{x-z}\right), \\ \dfrac{S+20}{x+z}=\dfrac{S-20}{y-z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+2z, \\ \dfrac{S}{y+z}=75\dfrac{2z}{(y+z)(y-z)}, \\ \dfrac{S+20}{y+3z}=\dfrac{S-20}{y-z} \end{cases}$$

$S=\dfrac{150z}{y-z}=\dfrac{150}{\frac{y}{z}-1}$; $\dfrac{y}{z}=a$.

$$\frac{\frac{150}{a-1}+20}{a+3}=\frac{\frac{150}{a-1}-20}{a-1}\Rightarrow\frac{150+20a-20}{a+3}=\frac{150-20a+20}{a-1}\Rightarrow$$
$\Rightarrow(130+20a)(a-1)=(170-20a)(a+3)\Rightarrow(13+2a)(a-1)=$ $=(17-2a)(a+3)\Rightarrow\cancel{13a}+2a^2-13-\cancel{2a}=\cancel{17a}-2a^2+51-$ $-\cancel{6a}\Rightarrow 4a^2=64\Rightarrow a^2=16\Rightarrow a=4.$

$S=\dfrac{150}{3}=50$ (км); $2S=100$ км.

О т в е т: расстояние 100 км.

13. Автомобиль с грузом ехал из одного города в другой со скоростью 60 км/ч, а возвращался обратно порожняком со скоростью 100 км/ч. Найти среднюю скорость автомобиля.

Р е ш е н и е. Пусть S км — расстояние между городами, тогда $t_1=\dfrac{S}{60}$ ч — время движения автомобиля с грузом и $t_2=\dfrac{S}{100}$ ч — время движения автомобиля обратно.

$V_{\text{ср}}=\dfrac{2S}{t_1+t_2}=\dfrac{2S}{\frac{S}{60}+\frac{S}{100}}=\dfrac{2\cdot 300}{8}=75$ (км/ч).

О т в е т: средняя скорость автомобиля 75 км/ч.

14. Поезд прошел мимо наблюдателя за 6 сек, а по мосту длиной 350 метров проходил в течение 20 сек. Найти скорость и длину поезда.

Р е ш е н и е. Пусть l м — длина поезда и v м/сек — его скорость.

Тогда имеем систему:

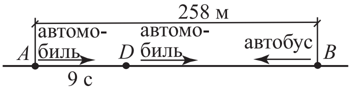
$$\begin{cases} l=v\cdot 6, \\ 350+l=v\cdot 20 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} l=6v, \\ 14v=350 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} v=25, \\ l=150. \end{cases}$$

25 м/сек $=\dfrac{25\cdot 3600}{1000}=90$ км/ч.

О т в е т: 90 км/ч и 150 м.

15. В гору ехал автомобиль. В 1-ю секунду после достижения пункта A он проехал 30 м, а в каждую следующую секунду он проезжал на 2 м меньше, чем в предыдущую. Через 9 сек после того, как автомобиль достиг пункта A, навстречу ему выехал автобус из пункта B, находящегося на расстоянии 258 м от пункта A. В 1-ю секунду автобус проехал 2 м, а в каждую следующую секунду он проезжал на 1 м больше, чем в предыдущую. Какое расстояние проехал автобус до встречи с автомобилем?

Решение.



Автомобиль за 9 сек проехал расстояние AD, причем AD может быть найдено как сумма n членов арифметической прогрессии:

$a_1 = 30;\ d = -2;\ n = 9.$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2}n,$$

$$S_n = \frac{2 \cdot 30 + 8 \cdot (-2)}{2} \cdot 9 = 198 \Rightarrow AD = 198 \text{ м}.$$

Расстояние $DB = 258 - 198 = 60$ м. Пусть автомобиль из D и автобус из B двигались навстречу друг другу до встречи k сек. Тогда путь автомобиля считается как сумма k членов арифметической прогрессии:

$a_1 = 30 - 2 \cdot 9 = 12;\ d = -2$

$$S_{k_1} = \frac{2 \cdot 12 - 2(k-1)}{2}k = (13-k)k.$$

Путь автобуса также можно посчитать как сумму k членов арифметической прогрессии: $a_1 = 2;\ d = 1.$

$$S_{k_2} = \frac{2 \cdot 2 + 1(k-1)}{2}k = \frac{3+k}{2}k.$$

Получаем

$$(13-k)k + \frac{3+k}{2}k = 60 \Rightarrow 13k - k^2 + \frac{3}{2}k + \frac{1}{2}k^2 = 60 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -\frac{1}{2}k^2 + \frac{29}{2}k - 60 = 0 \Rightarrow k^2 - 29k + 120 = 0 \Rightarrow k_1 = 5 \text{ и } k_2 = $$
$$= 24.$$

$k = 24$ не подходит, т. к. $13 - 24 < 0$, что невозможно, т. к. $S_{k_1} > 0$.

$$k = 5 \Rightarrow S_{k_2} = \frac{3+5}{2} \cdot 5 = 20 \text{ м}.$$

Ответ: путь автобуса до встречи 20 м.

16. Из пункта A в пункт B выехал грузовой автомобиль. Через 1 ч из пункта A в пункт B выехал легковой автомобиль, который прибыл в пункт B одновременно с грузовым автомобилем. Если бы грузовой и легковой автомобили одновременно выехали из пунктов A и B навстречу друг другу, то они бы встретились через 1 ч 12 мин после выезда. Сколько времени провел в пути от A до B грузовой автомобиль?

Решение. Пусть легковой автомобиль был в пути t, а грузовой — $(t+1)$ ч; путь от A до B — S км. Тогда скорость легкового автомобиля $\frac{S}{t}$, а грузового — $\frac{S}{t+1}$ км/ч. Из условия

$$\left(\frac{S}{t}+\frac{S}{t+1}\right)\cdot 1\frac{12}{60}=S \Rightarrow \left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}\right)\cdot 1{,}2=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2t+1}{t(t+1)}\cdot 1{,}2=1 \Rightarrow t^2+t=2{,}4t+1{,}2 \Rightarrow t^2-1{,}4t-1{,}2=0 \Rightarrow$$

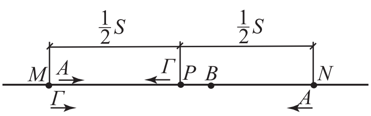
$\Rightarrow t_{1,\,2}=0{,}7\pm\sqrt{0{,}49+1{,}2}=0{,}7\pm 1{,}3 \Rightarrow t_1=2$ и $t_2=-0{,}6$ (не подходит).

$t=2$ и $t+1=3$.

Ответ: грузовик был в пути 3 часа.

17. На полпути между городами M и N, расстояние между которыми 280 км, расположен поселок P. Из M и P одновременно выехали навстречу друг другу автобус и грузовик: автобус — из M, грузовик — из P. Автобус прибыл в N одновременно с прибытием грузовика в M. Затем обе машины одновременно выехали навстречу друг другу, встретились в пункте B и прибыли одновременно: автобус в M, а грузовик в N. Найти расстояние от города M до пункта B, если известно, что автобус и грузовик двигались каждый со своей постоянной скоростью и оба сделали остановки одинаковой продолжительности: автобус — на пути от N к B, а грузовик — на пути от P к M.

Решение.



$S=280$ км $\Rightarrow MP=140$ км и $PN=140$ км.

Пусть x км/ч — скорость автобуса; y км/ч — скорость грузовика; t_0 ч — продолжительность остановок; z км — расстояние MB. Тогда из условий имеем систему:

$$\begin{cases} \dfrac{280}{x} = \dfrac{140}{y} + t_0, \\ \dfrac{280}{x} + t_0 = \dfrac{280}{y}, \\ \dfrac{z}{y} = \dfrac{280 - z}{x} + t_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t_0 = \dfrac{140}{y}, \\ \dfrac{280}{y} - \dfrac{280}{x} = t_0, \\ \dfrac{z}{y} + \dfrac{z}{x} = \dfrac{280}{x} + t_0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_0 = \dfrac{70}{y}, \\ \dfrac{210}{y} = \dfrac{280}{x}, \\ z\left(\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{280}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{3}y, \\ z\left(\dfrac{1}{y} + \dfrac{3}{4y}\right) = \dfrac{280}{y} \end{cases} \Leftrightarrow z \cdot \dfrac{7}{4} = 280 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow z = 160.$

Ответ: расстояние MB — 160 км.

18. Из пункта A в пункт B по течению отплывает лодка. Одновременно с ней из B против течения отправляется катер, который, прибыв в A, не останавливаясь, следует обратно в B, а из B также без остановки отправляется в A. На этом последнем участке маршрута катер опять встречает лодку, которая прошла к этому моменту $\dfrac{3}{4}$ пути от A до B. Скорость лодки при движении по течению в 9 раз больше ее скорости против течения. Во сколько раз скорость катера по течению больше скорости лодки по течению?

Решение.

Пусть x км/ч — собственная скорость лодки; y км/ч — собственная скорость катера; z км/ч — скорость течения; S — путь AB. Тогда $(x + z)$ и $(x - z)$ км/ч — скорость лодки по и против течения; $(y + z)$ и $(y - z)$ км/ч — скорость катера по и против течения. Тогда из условий

$$\begin{cases} x + z = 9(x - z), \\ \dfrac{S}{y - z} + \dfrac{S}{y + z} + \dfrac{S}{4(y - z)} = \dfrac{3S}{4(x + z)}. \end{cases}$$

Требуется определить $\dfrac{y + z}{x + z}$.

$$\begin{cases} 8x = 10z, \\ \dfrac{5}{4(y - z)} + \dfrac{1}{y + z} = \dfrac{3}{4(x + z)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5z}{4}, \\ \dfrac{5}{4(y - z)} + \dfrac{1}{y + z} = \dfrac{1}{3z}. \end{cases}$$

Решаем 2-е уравнение:

$$\frac{5y+5z+4y-4z}{4(y^2-z^2)}=\frac{1}{3z}\Rightarrow 27yz+3z^2=4y^2-4z^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4y^2-27yz-7z^2=0 \mid :z^2,\ \text{т. к. } z\neq 0\Rightarrow 4\left(\frac{y}{z}\right)^2-27\frac{y}{z}-7=0;$$

$$\frac{y}{z}=k\Rightarrow 4k^2-27k-7=0\Rightarrow k_{1,\,2}=\frac{27\pm\sqrt{729+112}}{8}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_{1,\,2}=\frac{27\pm 29}{8}\Rightarrow k=7.$$

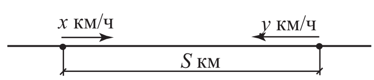
$$\frac{y}{z}=7\Rightarrow y=7z.$$

$$\frac{y+z}{x+z}=\frac{7z+z}{\dfrac{5z}{4}+z}=\frac{8z\cdot 4}{9z}=\frac{32}{9}.$$

Ответ: в $\frac{32}{9}$ раза.

19. Из двух пунктов одновременно навстречу друг другу вышли два пешехода. Определить, через сколько времени они встретятся, зная следующее: если бы один из пешеходов шел вдвое быстрее, то встреча произошла бы на полчаса раньше, а если бы вдвое быстрее шел другой — то на 48 мин раньше.

Решение.



Введенные обозначения и условия задачи позволяют написать систему трех уравнений с 4-мя неизвестными, где t час — время до встречи при движении пешеходов с первоначальными скоростями.

$$\begin{cases} S=(x+y)t,\\ S=(2x+y)\left(t-\dfrac{1}{2}\right),\\ S=(x+2y)\left(t-\dfrac{4}{5}\right) \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)t=(2x+y)\left(t-\dfrac{1}{2}\right),\\ (x+y)t=(x+2y)\left(t-\dfrac{4}{5}\right) \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xt+yt=2xt+yt-x-\dfrac{1}{2}\,y,\\ xt+yt=xt+2yt-\dfrac{4}{5}\,x-\dfrac{8}{5}\,y \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} xt=x+\dfrac{1}{2}\,y,\\ yt=\dfrac{4}{5}\,x+\dfrac{8}{5}\,y \end{cases}\Leftrightarrow$$

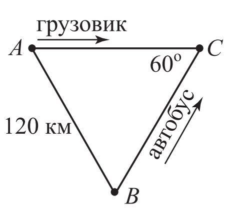
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2xt-2x,\\ (2xt-2x)t=\dfrac{4}{5}\,x+\dfrac{8}{5}\,(2xt-2x). \end{cases}$$

$$2xt(t-1)=\frac{4}{5}x+\frac{16x}{5}(t-1)\Rightarrow t^2-t=\frac{2}{5}+\frac{8t}{5}-\frac{8}{5}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 5t^2-13t+6=0\Rightarrow t_{1,\,2}=\frac{13\pm\sqrt{169-120}}{10}\Rightarrow t_{1,\,2}=\frac{13\pm 7}{10}\Rightarrow$$
$\Rightarrow t_1=2$ и $t_2=\dfrac{3}{5}$ — не подходит, т. к. $\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}<0$.

Ответ: пешеходы встретятся через 2 часа.

20. Из пунктов A и B, находящихся друг от друга на расстоянии 120 км, по прямолинейным дорогам, сходящимся в пункте C под углом 60°, одновременно выехали грузовик и автобус соответственно со скоростями 40 и 60 км/ч. Автобус прибыл в пункт C на 1 ч раньше грузовика. Найти время движения автобуса.

Решение. Пусть t ч — время движения автобуса.



Расстояние AC равно $40(t+1)$, расстояние BC — $60t$ км.

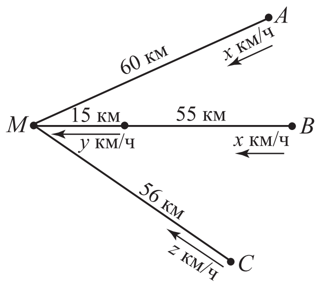
По теореме косинусов
$120^2=40^2(t+1)^2+60^2t^2-2\cdot 40(t+1)\times$ $\times\,60t\cos 60^\circ\Rightarrow 14\,400=1600(t^2+2t+1)+$ $+\,3600t^2-4800(t^2+t)\cdot\dfrac{1}{2}\Rightarrow$
$\Rightarrow 144=16t^2+32t+16+36t^2-24t^2-$ $-\,24t\Rightarrow 28t^2+8t-128=0\Rightarrow 7t^2+2t-32=0\Rightarrow$
$\Rightarrow t_{1,\,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+224}}{7}\Rightarrow t_{1,\,2}=\dfrac{-1\pm 15}{7}\Rightarrow t_1=2$ и $t_2=-\dfrac{16}{7}$ — не подходит, т. к. $t>0$.

Ответ: автобус ехал 2 часа.

21. Пункты A, B, C удалены от пункта M соответственно на 60, 55 и 56 км. Одновременно из этих пунктов в пункт M вышли 3 пешехода: 1-й из A, 2-й из B и 3-й из C. 1-й прошел весь путь с постоянной скоростью и прибыл в M на 2 ч раньше 2-го и 3-го, прибывших одновременно. 2-й пешеход, пройдя 40 км с той же скоростью, что и 1-й, сделал остановку на 1 ч. Остаток пути он прошел со скоростью, которая меньше скорости 3-го пешехода на столько же, на сколько скорость 3-го меньше скорости 1-го пешехода. 3-й пешеход прошел весь путь с постоянной скоростью. Определить скорости 1-го и 3-го пешеходов.

Решение.

Обозначения приведены на рисунке.



Из условий $\frac{60}{x}$ ч — время движения 1-го пешехода; $\frac{56}{z}$ ч — 3-го пешехода.

Если $x - z = a$, то $z - y = a \Rightarrow y = z - a \Rightarrow y = z - x + z \Rightarrow y = 2z - x$.

$$\begin{cases} \frac{40}{x} + 1 + \frac{15}{2z - x} = \frac{60}{x} + 2, \\ \frac{56}{z} = \frac{60}{x} + 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{15}{2z - x} = \frac{20}{x} + 1, \\ \frac{28}{z} = \frac{30}{x} + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{15}{2z - x} = \frac{20 + x}{x}, \\ \frac{28}{z} = \frac{30 + x}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{28x}{30 + x}, \\ 15x = \left(2\frac{28x}{30 + x} - x\right)(20 + x) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{28x}{30 + x}, \\ 15x(30 + x) = (56x - 30x - x^2)(20 + x) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{28x}{30 + x}, \\ 450 + 15x = (26 - x)(20 + x) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{28x}{30 + x}, \\ 450 + 15x = 520 + 6x - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{28x}{30 + x}, \\ x^2 + 9x - 70 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \text{ и } x_2 = -14 \text{ (не подходит)} \\ z = \frac{28 \cdot 5}{35} = 4. \end{cases}$$

О т в е т: скорость 1-го пешехода 5 км/ч, 3-го пешехода — 4 км/ч.

22. Из 2-х пунктов, расстояние между которыми 2400 км, навстречу друг другу выезжают одновременно пассажирский и скорый поезда. Каждый из них едет с постоянной скоростью, и в некоторый момент они встречаются. Если бы оба поезда шли со скоростью скорого, то их встреча произошла бы на 3 часа раньше, если бы оба поезда шли со скоростью пассажирского, то их встреча произошла бы на 5 часов позже фактического момента встречи. Найти скорости поездов.

Решение. Пусть x км/ч — скорость пассажирского и y км/ч — скорого поезда. Тогда $\dfrac{2400}{x+y}$ ч — время движения поездов до встречи. Из условий получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{2400}{2y}+3=\dfrac{2400}{x+y}, \\ \dfrac{2400}{2x}-5=\dfrac{2400}{x+y} \end{cases} \Leftrightarrow - \begin{cases} \dfrac{1200}{y}+3=\dfrac{2400}{x+y}, \\ \dfrac{1200}{x}-5=\dfrac{2400}{x+y} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1200}{x}-\dfrac{1200}{y}=8, \\ \dfrac{800}{x+y}-\dfrac{400}{y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{150}{x}-\dfrac{150}{y}=1, \\ \dfrac{800}{x+y}-\dfrac{400}{y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{150y}{y+150}, \\ \dfrac{800}{\dfrac{150y}{y+150}+y}-\dfrac{400}{y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{150y}{y+150}, \\ \dfrac{800y+120\,000}{150y+y^2+150y}-\dfrac{400}{y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

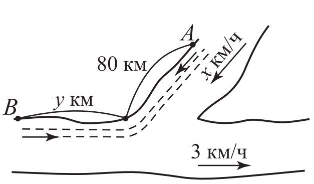
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{150y}{y+150}, \\ \dfrac{800y+\cancel{120\,000}-400y-\cancel{120\,000}}{y(y+300)}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{150y}{y+150}, \\ \dfrac{400\cancel{y}}{\cancel{y}(y+300)}=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{150y}{y+150}, \\ y=100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{150\cdot 100}{250}=60, \\ y=100. \end{cases}$$

Ответ: скорости 60 и 100 км/ч.

23. В реку впадает приток. Пароход отходит от пристани A на притоке, идет вниз по течению 80 км до реки, далее по реке вверх против течения до пристани B, затратив 18 часов на весь путь от A до B. Затем пароход возвращается обратно. Время обратного движения от B до A по тому же пути равно 15 часам. Собственная скорость парохода равна 18 км/ч. Скорость течения реки равна 3 км/ч. Каково расстояние от пристани A до пристани B и какова скорость притока?

Решение.



Пусть x км/ч — скорость притока; y км — расстояние от пристани A до впадения притока в реку. Тогда из условий имеем систему двух уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{80}{18+x} + \dfrac{y}{18-3} = 18, \\ \dfrac{y}{18+3} + \dfrac{80}{18-x} = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{80}{18+x} + \dfrac{y}{15} = 18, \\ \dfrac{y}{21} + \dfrac{80}{18-x} = 15 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{400}{18+x} + \dfrac{y}{3} = 90, \\ \dfrac{y}{3} + \dfrac{560}{18-x} = 105 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{560}{18-x} - \dfrac{400}{18+x} = 15, \\ \dfrac{y}{3} = 90 - \dfrac{400}{18+x}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\dfrac{112}{18-x} - \dfrac{80}{18+x} = 3 \Rightarrow 2016 + 112x - 1440 + 80x = 972 - 3x^2 \Rightarrow 3x^2 + 192x - 396 = 0 \Rightarrow x^2 + 64x - 132 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$ и $x_2 = -66$ — не подходит, т. к. $x > 0$.

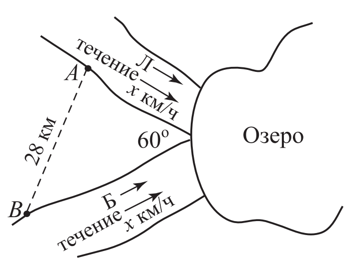
$\dfrac{y}{3} = 90 - \dfrac{400}{20} \Rightarrow \dfrac{y}{3} = 70 \Rightarrow y = 210.$

$AB = 210 + 80 = 290$ (км).

Ответ: скорость притока 2 км/ч, расстояние между пристанями 290 км.

24. Две реки с прямолинейными руслами и одинаковой скоростью течения впадают в одном и том же месте в озеро, образуя между собой угол 60°. От двух причалов, расположенных на разных реках и отстоящих друг от друга на расстоянии 28 км, одновременно вышли байдарка и лодка, скорости которых в стоячей воде соответственно равны 10 и 3 км/ч. Байдарка достигла озера через 2, а лодка — через 4 часа. Найти скорость течения реки.

Решение.



Путь лодки от A до озера S_1: $S_1 = (3 + x) \cdot 4$.

Путь байдарки от B до озера S_2: $S_2 = (10 + x) \cdot 2$.

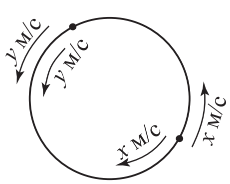
По теореме косинусов

$S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2\cos 60° = 28^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow (12 + 4x)^2 + (20 + 2x)^2 - 2 \times$ $\times (12 + 4x)(20 + 2x) \cdot \dfrac{1}{2} = 784 \Rightarrow$ $\Rightarrow 144 + 96x + 16x^2 + 400 + 80x +$ $+ 4x^2 - 240 - 80x - 24x - 8x^2 -$ $- 784 = 0 \Rightarrow 12x^2 + 72x - 480 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x - 40 = 0 \Rightarrow x_1 = 4$ и $x_2 = -10$ (не подходит, т. к. $x > 0$).

Ответ: скорость течения реки 4 км/ч.

25. Две точки движутся по окружности длиной 120 м с постоянными скоростями. Если они движутся в разных направлениях, то встречаются через каждые 15 сек. При движении в одном направлении одна точка догоняет другую через каждые 60 сек. Найти скорости точек.

Решение.



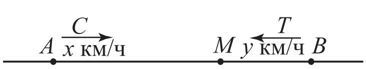
Пусть одна точка движется со скоростью x, а другая — y м/с; $x > y$. Тогда, если они движутся навстречу друг другу, то за 15 сек вместе описывают окружность: $15x + 15y = 120$. Если они движутся, догоняя одна другую, то $60x - 60y = 120$.

$$\begin{cases} 15(x+y) = 120, \\ 60(x-y) = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 8, \\ x-y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5, \\ y = 3. \end{cases}$$

Ответ: скорости точек 5 и 3 м/с.

26. Из пункта A в пункт B отправился скорый поезд. Одновременно навстречу ему из B в A вышел товарный поезд, который встретился со скорым через $\frac{2}{3}$ часа после отправления. Расстояние между A и B равно 80 км, поезда двигались с постоянными скоростями. С какой скоростью двигался скорый поезд, если 40 км он шел на $\frac{3}{8}$ часа дольше, чем товарный поезд шел 5 км?

Решение.



Обозначим через x и y скорости скорого и товарного поездов.

Из условия, до встречи поездов в M прошло $\frac{2}{3}$ часа, значит можно написать уравнение: $(x+y)\cdot\frac{2}{3} = 80$. Из 2-го условия $\frac{40}{x} - \frac{3}{8} = \frac{5}{y}$.

$$\begin{cases} x + y = 120, \\ \dfrac{40}{x} - \dfrac{5}{y} = \dfrac{3}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 120 - x, \\ 320y - 40x = 3xy \end{cases} \Leftrightarrow$$

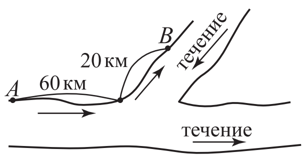
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 120 - x, \\ 320(120 - x) - 40x = 3x(120 - x). \end{cases}$$

$38400 - 320x - 40x - 360x + 3x^2 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 720x + 38400 = 0 \Rightarrow x^2 - 240x + 12800 = 0 \Rightarrow x_{1,\,2} = 120 \pm \sqrt{14\,400 - 12\,800} = 120 \pm 40 \Rightarrow x_1 = 80$ и $x_2 = 160$ — не подходит, т. к. $160 > 120$.

Ответ: скорость скорого поезда 80 км/ч.

27. Пароход, отчалив от пристани A, спустился вниз по течению реки на 60 км до устья впадающего в реку притока и поднялся вверх по притоку на 20 км до пристани B. Весь путь от A до B пароход прошел за 7 часов. Скорость течения реки и скорость течения притока равны 1 км/ч. Найти собственную скорость парохода.

Решение.



Пусть собственная скорость парохода x км/ч. Тогда при движении по течению реки он затратил $\dfrac{60}{x+1}$ часов, а при движении против течения притока — $\dfrac{20}{x-1}$ часов. По условию $\dfrac{60}{x+1} + \dfrac{20}{x-1} = 7 \Rightarrow 60x - 60 + 20x + 20 = 7x^2 - 7$.

$7x^2 - 80x + 33 = 0 \Rightarrow x_{1,\,2} = \dfrac{40 \pm \sqrt{1600 - 231}}{7} \Rightarrow$
$\Rightarrow x_{1,\,2} = \dfrac{40 \pm 37}{7} \Rightarrow x_1 = 11$ и $x_2 = \dfrac{3}{7}$ — не подходит, т. к. $\dfrac{3}{7} < 1$.

Ответ: собственная скорость парохода 11 км/ч.

28. Два тела движутся по окружности равномерно в одну сторону, причем 1-е тело проходит окружность на 2 сек быстрее 2-го и догоняет 2-е тело каждые 12 сек. За какое время каждое тело проходит окружность?

Решение. Пусть x и y м/с $(x > y)$ — скорости движения тел по окружности, l — длина окружности. Тогда из условий задачи

$$\begin{cases} \dfrac{l}{x} = \dfrac{l}{y} - 2, \\ l = (x - y) \cdot 12. \end{cases}$$

Нужно определить $\dfrac{l}{x}$ и $\dfrac{l}{y}$.

$$\begin{cases} \dfrac{l}{x} = \dfrac{l}{y} - 2, \\ l = 12x - 12y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{l}{y} - \dfrac{l}{x} = 2, \\ \dfrac{l}{x} = 12 - 12\dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

Обозначим: $\dfrac{l}{x} = a$; $\dfrac{l}{y} = b$; $\dfrac{y}{x} = \dfrac{a}{b}$.

$$\begin{cases} b = a+1, \\ a = 12 - \dfrac{12a}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a+2, \\ a = 12 - \dfrac{12a}{a+2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = a+2, \\ a^2 + 2a = \cancel{12a} + 24 - \cancel{12a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a+2, \\ a^2 + 2a - 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 4, \\ b = 6. \end{cases}$$

Ответ: за 4 и 6 сек.

ЗАДАЧИ НА РАБОТУ

1. Бассейн при одновременном включении 4-х кранов заполняется водой за 45 мин. За сколько минут тот же бассейн может заполниться водой при одновременном включении 6-ти таких кранов?

Решение. Пусть объем бассейна V м^3, а производительность (мощность) каждого крана x м^3/мин, тогда $\dfrac{V}{4x} = 45$. $\dfrac{V}{x} = 180$; нужно найти $\dfrac{V}{6x} \Rightarrow \dfrac{V}{6x} = \dfrac{180}{6} = 30$ (мин).

Ответ: бассейн заполнится за 30 мин.

2. Две бригады должны были закончить уборку урожая за 12 дней. После 8 дней совместной работы 1-я бригада получила другое задание, поэтому 2-я бригада одна закончила уборку за 7 дней. За сколько дней могла бы убрать урожай каждая бригада, работая отдельно?

Решение. Обозначим весь урожай A тонн; производительность труда 1-й бригады x, а производительность 2-й бригады y т/день. Совместная производительность $(x+y)$ т/день. Отсюда:

$$\begin{cases} (x+y) \cdot 12 = A, \\ 8(x+y) + 7y = A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \dfrac{A}{12}, \\ \dfrac{8A}{12} + 7y = A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{A}{12} - y, \\ 7y = \dfrac{A}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{A}{21}, \\ x = \dfrac{A}{28} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{y} = 21, \\ \dfrac{A}{x} = 28. \end{cases}$$

Ответ: 1-я бригада уберет урожай за 28 дней, 2-я бригада — за 21 день.

3. Из резервуара идут три трубы. Через первые две трубы содержимое резервуара откачивается за 1 ч 10 мин, через первую и третью за 1 ч 24 мин, а через вторую и третью за 2 ч 20 мин. За какое время содержимое резервуара откачивается всеми трубами вместе?

Решение. Пусть объем резервуара V, тогда нужно определить $\frac{1}{x+y+z}$, где x, y и z — мощности труб, выраженные в соответствующих единицах.

$$\begin{cases} \frac{V}{x+y}=1\frac{10}{60}, \\ \frac{V}{x+z}=1\frac{24}{60}, \\ \frac{V}{y+z}=2\frac{20}{60} \end{cases} \Leftrightarrow +\begin{cases} x+y=\frac{6V}{7}, \\ x+z=\frac{5V}{7}, \\ y+z=\frac{3V}{7} \end{cases} \Leftrightarrow 2x+2y+2z=$$
$$=2V \Leftrightarrow x+y+z=V \Leftrightarrow \frac{V}{x+y+z}=1.$$

Ответ: все трубы вместе будут работать 1 час.

4. Две трубы, действуя вместе в течение 1 часа, наполняют водой $\frac{3}{4}$ бассейна. Если сначала 1-я труба наполнит $\frac{1}{4}$ бассейна, а затем вторая при выключенной первой доведет объем воды до $\frac{3}{4}$ бассейна, то на это понадобится 2,5 часа. Если 1-ю трубу включить на 1 час, а вторую на 0,5 часа, то они наполнят бассейн более, чем наполовину. За какое время наполнит бассейн каждая труба?

Решение. Пусть объем бассейна 1 куб. ед., x и y куб. ед./ч — мощности труб. Из условий:

$$\begin{cases} (x+y)\cdot 1=\frac{3}{4}, \\ \frac{1}{4x}+\frac{1}{2y}=\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{3}{4}-x, \\ \frac{1}{4x}+\frac{1}{2\left(\frac{3}{4}-x\right)}=\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{3}{4}-x, \\ \frac{1}{4x}+\frac{1}{\frac{3}{4}-2x}=\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{3}{4}-x, \\ \frac{3-4x+8x}{4x(3-4x)}=\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{3}{4}-x, \\ 6+8x=60x-80x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{3}{4}-x, \\ 80x^2-52x+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{3}{4}-x, \\ 40x^2-26x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{3}{4}-x, \\ x_{1,\,2}=\frac{13\pm\sqrt{169-120}}{40} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3}{4} - x, \\ x_1 = \dfrac{1}{2};\, x_2 = \dfrac{3}{20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{4};\, y_2 = \dfrac{3}{5}, \\ x_1 = \dfrac{1}{2};\, x_2 = \dfrac{3}{20}. \end{cases}$$

По условию: $x + 0{,}5y > 0{,}5$.

1) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8} > \dfrac{1}{2}$;

2) $\dfrac{3}{20} + \dfrac{3}{10} = \dfrac{9}{20} < \dfrac{1}{2}$, не соответствует условию.

$\dfrac{1}{x} = 2$ ч; $\dfrac{1}{y} = 4$ ч.

Ответ: 2 и 4 часа.

5. Два экскаватора разной конструкции должны проложить две траншеи одинакового сечения длиной 960 м и 180 м. Вся работа продолжалась 22 дня, в течение которых 1-й экскаватор рыл большую траншею. 2-й экскаватор начал работать на 6 дней позднее 1-го, отрыл меньшую траншею, 3 дня ремонтировался и затем помогал 1-му. Если не нужно было бы тратить времени на ремонт, то работа была бы закончена за 21 день. Какова производительность каждого экскаватора в м/день?

Решение. Пусть x и y м/день — производительность экскаваторов. За 22 дня 1-й экскаватор вырыл $22x$ м, осталось в первой траншее вырыть $(960 - 22x)$ м. 2-й экскаватор работал $22 - 6 - 3 = 13$ дней и вырыл $13y$ м. По условию

$13y = 180 + 960 - 22x$.

Если бы не было ремонта, то 1-й экскаватор вырыл бы $21x$ м, а 2-й — $(21 - 6)y$ м, т. е. $15y$ м. По условию: $15y = 180 + 960 - 21x$.

$$-\begin{cases} 13y = 1140 - 22x, \\ 15y = 1140 - 21x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = x, \\ 13y = 1140 - 44y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 20, \\ x = 40. \end{cases}$$

Ответ: 40 и 20 м/день.

6. Три тракторные бригады вместе вспахивают поле за 4 дня. Это же поле 1-я и 2-я бригады вместе вспахивают за 6 дней, а 1-я и 3-я бригады вместе — за 8 дней. Во сколько раз больше площадь, вспахиваемая за день 2-й бригадой, по сравнению с площадью, вспахиваемой за день 3-й бригадой?

Решение. Пусть S га — площадь поля; x, y и z га/день — производительности труда бригад. Тогда:

$$\begin{cases} x+y+z=\dfrac{S}{4}, \\ x+y=\dfrac{S}{6}, \\ x+z=\dfrac{S}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\dfrac{S}{4}-\dfrac{S}{6}, \\ y=\dfrac{S}{4}-\dfrac{S}{8}, \\ x=\dfrac{S}{6}-y. \end{cases}$$

$z=\dfrac{S}{12}$ и $y=\dfrac{S}{8}$. $\dfrac{y}{z}=\dfrac{12}{8} \Leftrightarrow \dfrac{y}{z}=\dfrac{3}{2}$.

Ответ: в 1,5 раза.

7. Два насоса различной мощности, работая вместе, наполняют бассейн за 4 часа. Для наполнения бассейна наполовину 1-му насосу требуется времени на 4 часа больше, чем 2-му насосу для наполнения бассейна на три четверти. За какое время может наполнить бассейн каждый насос в отдельности?

Решение. Пусть x — мощность 1-го насоса и y м^3/ч — мощность 2-го насоса, тогда $(x+y)$ м^3/ч — их общая мощность. V м^3 — объем бассейна.

Тогда имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{V}{x+y}=4, \\ \dfrac{V}{2x}-4=\dfrac{3V}{4y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\dfrac{V}{4}, \\ \dfrac{V}{2x}-4=\dfrac{3V}{4y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{V}+\dfrac{y}{V}=\dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{1}{2}\,\dfrac{V}{x}-4=\dfrac{3}{4}\,\dfrac{V}{y}. \end{cases}$$

Обозначим: $\dfrac{x}{V}=a$; $\dfrac{y}{V}=b$.

$$\begin{cases} a+b=\dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{1}{2a}-4=\dfrac{3}{4b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1-4b}{4}, \\ 2b-16ab=3a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1-4b}{4}, \\ 2b-16\dfrac{1-4b}{4}b-3\dfrac{1-4b}{4}=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1-4b}{4}, \\ 8b-3+12b-16b+64b^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1-4b}{4}, \\ 64b^2+4b-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

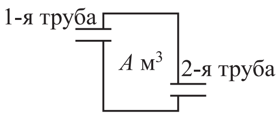
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1-4b}{4}, \\ b_{1,\,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+192}}{64} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{16}, \\ b=\dfrac{3}{16}. \end{cases}$$

Отсюда $\dfrac{V}{x}=16$ ч; $\dfrac{V}{y}=\dfrac{16}{3}=5\dfrac{1}{3}$ ч.

Ответ: 1-й насос — за 16 часов, 2-й насос — за 5 часов 20 мин.

8. В бак может поступать вода через одну из двух труб. Через 1-ю трубу бак можно наполнить на 1 час быстрее, чем через 2-ю трубу. Если бы емкость бака была больше на 2 м^3, а пропускная способность 2-й трубы была бы больше на $\frac{4}{3}$ м^3/ч, то для наполнения бака через 2-ю трубу понадобилось бы столько же времени, сколько требуется для пропуска 2 м^3 через 1-ю трубу. Какова емкость бака, если известно, что за время его наполнения через 2-ю трубу через 1-ю трубу могло поступить 3 м^3 воды?

Решение.



Пусть емкость бака A м^3, мощность 1-й трубы (пропускная способность) x, мощность 2-й трубы y м^3/ч. Из условий задачи получаем систему трех уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{A}{y} - \dfrac{A}{x} = 1, \\ \dfrac{A+2}{y+\frac{4}{3}} = \dfrac{2}{x}, \\ \dfrac{A}{y} = \dfrac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{A}{y} - \dfrac{A}{x} = 1, \\ \dfrac{A}{y} - \dfrac{3}{x} = 0, \\ \dfrac{A+2}{3y+4} = \dfrac{2}{3x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{A}{y} = \dfrac{3}{x}, \\ \dfrac{A}{x} + 1 = \dfrac{3}{x}, \\ (A+2)3x = 6y+8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Ax = 3y, \\ A = 3 - x, \\ (3 - x + 2)\cdot 3x = 2(3-x)x + 8. \end{cases}$$

$15x - 3x^2 = -2x^2 + 6x + 8 \Rightarrow x^2 - 9x + 8 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ и $x_2 = 8$ (не подходит, т. к. $3 - 8 < 0$).

$A = 3 - 1 = 2$ (м^3).

Ответ: емкость бака 2 м^3.

9. В бассейн может поступать вода через пять труб. Первые три трубы, работая вместе, наполняют бассейн за 3 ч, 4-я и 5-я вместе с 1-й — за 2 ч, 3-я и 4-я — за 6 ч, 2-я и 5-я — за 4 ч. За сколько времени наполняют бассейн все пять труб вместе?

Решение.

Пусть V м^3 — объем бассейна; aV, bV, cV, dV и fV м^3/ч — мощности пяти труб, где a, b, c, d, f определяют части объема бассейна, наполняемые каждой трубой за 1 час. Тогда:

$$\begin{cases} \dfrac{V}{V(a+b+c)} = 3, \\ \dfrac{V}{V(a+d+f)} = 2, \\ \dfrac{V}{V(c+d)} = 6, \\ \dfrac{V}{V(b+f)} = 4. \end{cases}$$

Нужно определить:

$$\frac{V}{V(a+b+c+d+f)} = \frac{1}{a+b+c+d+f}.$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a+b+c} = 3, \\ \dfrac{1}{a+d+f} = 2, \\ \dfrac{1}{c+d} = 6, \\ \dfrac{1}{b+f} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow + \begin{cases} a+b+c = \dfrac{1}{3}, \\ a+d+f = \dfrac{1}{2}, \\ c+d = \dfrac{1}{6}, \\ b+f = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

$$- \begin{cases} 2a+b+c+d+f = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{6}, \\ b+c+d+f = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{12} \end{cases} \Leftrightarrow 2a = \frac{5}{6} - \frac{5}{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{5}{24}.$$

$$a+b+c+d+f = \frac{5}{24} + \frac{5}{12} = \frac{5}{8} \Rightarrow \frac{1}{a+b+c+d+f} = \frac{8}{5} = 1{,}6.$$

Ответ: пять труб наполнят бассейн за 1 час 36 мин.

10. Каждый из рабочих должен был изготовить 36 одинаковых деталей. 1-й рабочий приступил к выполнению своего задания на 4 мин позже 2-го, но $\frac{1}{3}$ задания они выполнили одновременно. Полностью выполнив свое задание, 1-й рабочий после двухминутного перерыва снова приступил к работе и к моменту выполнения задания 2-м рабочим изготовил еще 2 детали. Сколько деталей в час изготавливал каждый рабочий?

Решение. Пусть 1-й рабочий изготавливал x, а 2-й — y дет/мин. $\frac{1}{3}$ задания — это 12 деталей. Поэтому 1-е уравнение $\dfrac{12}{y} = \dfrac{12}{x} + 4$.

1-й рабочий сделал 26 деталей и отдыхал 2 мин, а 2-й сделал 24 детали. Поэтому 2-е уравнение $\frac{26}{y}+2=\frac{24}{y}$.

$$-\begin{cases}\frac{12}{y}-\frac{12}{x}=4,\\ \frac{12}{y}-\frac{13}{x}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{12}{y}=4+\frac{12}{x},\\ \frac{1}{x}=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{y}{3}=\frac{x}{x+3},\\ x=\frac{1}{3}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{1}{3},\\ y=\frac{3}{10}.\end{cases}$$

$\frac{1}{3}$ дет/мин $=\frac{1}{3}\cdot 60=20$ дет/ч; $\frac{3}{10}$ дет/мин $=18$ дет/ч.

Ответ: 1-й рабочий изготавливал 20 дет/ч, 2-й — 18 дет/ч.

11. Мастер, работая вместе с учеником, помог выполнить часть задания, а затем прекратил свою работу. Оставшуюся часть задания ученик закончил один. В результате время, затраченное на выполнение задания, оказалось в 3 раз меньше времени, необходимого ученику для выполнения этого задания им одним. Во сколько раз мастер затратил бы больше времени, выполняя один все задание, по сравнению с тем временем, которое он затратил на помощь ученику?

Решение. Пусть A изделий — все задание; x — производительность мастера, y изд./ч — производительность ученика; t ч — время, которое затратил мастер на помощь ученику. Тогда мастер вместе с учеником сделали $(x+y)t$ изделий, и осталось сделать $A-(x+y)t$. На изготовление этих изделий ученик затратил $\frac{A-(x+y)t}{y}$ часов. Из условия

$$t+\frac{A-(x+y)t}{y}=\frac{1}{3}\,\frac{A}{y}.$$

Мастер, выполняя один все задание, потратил бы $\frac{A}{x}$ часов, поэтому нужно определить $\frac{A}{xt}$.

$\cancel{ty}+A-tx-\cancel{ty}=\frac{A}{3}\Rightarrow tx=\frac{2A}{3}\Rightarrow\frac{A}{tx}=\frac{3}{2}$.

Ответ: в 1,5 раза.

12. Две бригады учащихся, работая совместно, закончили посадку деревьев на учебно-опытном участке за 4 дня. Сколько дней потребовалось бы на выполнение этой работы каждой бригаде отдельно, если бы одна из бригад могла закончить посадку деревьев на 6 дней раньше другой?

Решение. Пусть нужно было посадить n деревьев; x — производительность 1-й бригады, y дер./дн. — производительность 2-й. Тогда из условий:

$$\begin{cases} (x+y)\cdot 4 = n, \\ \dfrac{n}{x} - \dfrac{n}{y} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{n} + \dfrac{y}{n} = \dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{n}{x} - \dfrac{n}{y} = 6. \end{cases}$$

Нужно определить $\dfrac{n}{x}$ и $\dfrac{n}{y}$.

Обозначим $\dfrac{n}{x} = a$ и $\dfrac{n}{y} = b$.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{4}, \\ a - b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a - 6, \\ \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a-6} = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a - 6, \\ 4(2a-6) = a^2 - 6a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = a - 6, \\ a^2 - 14a + 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 12;\ a_2 = 2, \\ b_1 = 6;\ b_2 = -4. \end{cases}$$

2-я пара не подходит, т. к. $b > 0$.

Ответ: 1-я бригада работала бы 12 дней, а 2-я — 6 дней.

13. Двое рабочих совместно могут выполнить плановое задание за 12 дней. Если половину задания будет выполнять один рабочий, а затем 2-ю половину — другой, то все задание будет выполнено за 25 дней. За сколько дней может выполнить задание каждый рабочий?

Решение. Пусть 1-й рабочий выполнит задание за k, а 2-й — за n дней. A изделий — все задание. Тогда $\dfrac{A}{k}$ — производительность 1-го рабочего, а $\dfrac{A}{n}$ изд./дн. — производительность 2-го. Отсюда два уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{A}{\dfrac{A}{k} + \dfrac{A}{n}} = 12, \\ \dfrac{A}{2\dfrac{A}{k}} + \dfrac{A}{2\dfrac{A}{n}} = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{kn}{k+n} = 12, \\ k + n = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} kn = 600, \\ k + n = 50 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 50 - n, \\ 50n - n^2 - 600 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 50 - n, \\ n^2 - 50n + 600 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n_1 = 20;\ n_2 = 30, \\ k_1 = 30;\ k_2 = 20. \end{cases}$$

Ответ: за 20 и 30 дней.

14. В одном бассейне имеется 200 м^3 воды, а в другом — 112 м^3. Открывают краны, через которые наполняются бассейны. Через сколько часов количество воды в басейнах будет одинаковым, если во 2-й бассейн вливается в час на 22 м^3 воды больше, чем в 1-й?

Решение. Пусть x — мощность 1-го крана, тогда $(x + 22)$ м^3/ч — мощность 2-го крана. По условию: $200 + xt = 112 + (x + 22)t$, где t ч — время наполнения бассейнов до одинакового состояния.

$200 + \cancel{xt} = 112 + \cancel{xt} + 22t \Rightarrow 22t = 88 \Rightarrow t = 4.$

Ответ: через 4 часа.

15. Бригада монтеров могла окончить электропроводку в 4 часа дня, прокладывая в час по 8 м. После выполнения половины всего задания один рабочий выбыл из бригады; в связи с этим бригада стала прокладывать в час по 6 м и закончила работу в 6 часов вечера. Сколько метров провода было проложено и за сколько часов?

Решение. Допустим, было проложено a м провода, и работа продолжалась $(t + 2)$ ч., где t ч. — ранее запланированное время. Тогда из условий получаем 2 уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{8} = t, \\ \dfrac{a}{2\cdot 8} + \dfrac{a}{2\cdot 6} = t + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{8} = t, \\ \dfrac{a}{16} + \dfrac{a}{12} = \dfrac{a}{8} + 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{a}{8}, \\ a\dfrac{1}{48} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 96, \\ t = 12. \end{cases} \quad t + 2 = 14.$$

Ответ: было проложено 96 метров провода за 14 часов.

16. Двум рабочим было поручено изготовить партию одинаковых деталей. После того, как 1-й проработал 2 часа, а 2-й 5 часов, оказалось, что они выполнили половину всей работы. Проработав совместно еще 3 часа, они установили, что им осталось выполнить 0,05 всей работы. За какой промежуток времени каждый из них, работая отдельно, может выполнить всю работу?

Решение. Допустим, нужно было изготовить k деталей; x — производительность 1-го рабочего; y дет./ч — производительность 2-го. Условия позволяют составить два уравнения:

$$\begin{cases} 2x + 5y = \dfrac{k}{2}, \\ 2x + 5y + 3(x + y) + 0{,}05k = k. \end{cases}$$

Нужно определить $\frac{k}{x}$ и $\frac{k}{y}$.

$$\begin{cases} 4x + 10y = k, \\ 5x + 8y = 0{,}95k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\frac{x}{k} + 10\frac{y}{k} = 1, \\ 5\frac{x}{k} + 8\frac{y}{k} = 0{,}95. \end{cases}$$

Обозначим $\frac{x}{k} = a$; $\frac{y}{k} = b$.

$$\begin{cases} 4a + 10b = 1, & | \cdot 5 \\ 5a + 8b = 0{,}95 & | \cdot 4 \end{cases} \Leftrightarrow - \begin{cases} 20a + 50b = 5, \\ 20a + 32b = 3{,}8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 10b = 1, \\ 18b = 1{,}2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1 - 10b}{4}, \\ b = \dfrac{1}{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{12}, \\ b = \dfrac{1}{15}. \end{cases}$$

Отсюда $\frac{k}{x} = 12$ и $\frac{k}{y} = 15$.

Ответ: 1-й рабочий — за 12 часов; 2-й — за 15 часов.

17. Два одинаковых бассейна одновременно начали наполняться водой. В 1-й бассейн поступает в час на 30 м^3 больше воды, чем во 2-й. В некоторый момент в 2-х бассейнах вместе оказалось столько воды, сколько составляет объем каждого из них. После этого через 2 ч 40 мин наполнился 1-й бассейн, а еще через 3 ч 20 мин — 2-й. Сколько воды поступало в час в каждый бассейн?

Решение. Пусть во 2-й бассейн поступает x, а в 1-й — $(x + 30)$ м^3/ч. Объем одного бассейна V м^3; t ч. — время до промежуточного момента. Тогда имеем:

$$\begin{cases} (x + 30)t + xt = V, \\ (x + 30)t + 2\dfrac{40}{60}(x + 30) = V, \\ xt + 2\dfrac{40}{60}x + 3\dfrac{20}{60}x = V \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2xt + 30t = V, \\ xt + 30t + \dfrac{8}{3}x + 80 = V, \\ xt + 6x = V \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xt + 30t - 6x = 0, \\ 30t - 6x + \dfrac{8}{3}x + 80 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 30t = \dfrac{10}{3}x - 80, \\ xt + 30t - 6x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{x}{9} - \dfrac{8}{3}, \\ xt + 30t - 6x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{x - 24}{9}, \\ x\dfrac{x - 24}{9} + 30\dfrac{x - 24}{9} - 6x = 0. \end{cases}$$

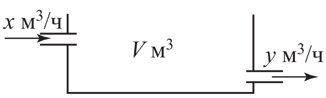
$x^2 - 24x + 30x - 720 - 54x = 0 \Rightarrow x^2 - 48x - 720 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_{1,\,2} = 24 \pm \sqrt{576 + 720} \Rightarrow x_{1,\,2} = 24 \pm 36 \Rightarrow x = 60.$

$x + 30 = 90.$

Ответ: в 1-й бассейн поступало 90 м^3/ч, во 2-й — 60 м^3/ч.

18. В бассейн проведены две трубы разного сечения. Одна — равномерно подающая, другая — равномерно отводящая воду, причем через 1-ю бассейн наполняется на 2 часа дольше, чем через 2-ю опорожняется. При заполненном на $\frac{1}{3}$ бассейне были открыты обе трубы, и бассейн оказался пустым через 8 часов. За сколько часов, действуя отдельно, 1-я труба наполняет бассейн, а 2-я его опорожняет?

Решение.



Объем бассейна V м^3; мощность 1-й трубы — x; мощность 2-й — y м^3/ч, t ч — время опорожнения бассейна.

Тогда условия дают следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x(t+2) = V, \\ yt = V, \\ \dfrac{V}{3} + 8x - 8y = 0. \end{cases}$$

Нужно определить $\dfrac{V}{x}$ и $\dfrac{V}{y}$.

$$\begin{cases} t = \dfrac{V}{x} - 2, \\ t = \dfrac{V}{y}, \\ V = 24y - 24x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{V}{x} - 2 = \dfrac{V}{y}, \\ 24\dfrac{y}{V} - 24\dfrac{x}{V} = 1. \end{cases}$$

Обозначим $\dfrac{V}{x} = a;\ \dfrac{V}{y} = b.$

$$\begin{cases} a - 2 = b, \\ \dfrac{24}{b} - \dfrac{24}{a} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a - 2, \\ \dfrac{24}{a-2} - \dfrac{24}{a} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = a - 2, \\ 24a - 24a + 48 = a^2 - 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a - 2, \\ a^2 - 2a - 48 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = a - 2, \\ a_1 = 8;\ a_2 = -6 \text{ (не подходит)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3, \\ b = 6. \end{cases}$$

Ответ: бассейн наполняется за 8, а опорожняется за 6 часов.

19. Два «механических крота» разной мощности при одновременной работе с разных концов тоннеля могли бы прорыть его за 5 дней. В действительности же оба «крота» были применены последовательно с одной стороны тоннеля, причем 1-й прорыл $\frac{1}{3}$, а 2-й — остальные $\frac{2}{3}$ его длины. На выполнение всей работы ушло при этом 10 дней. За сколько дней каждый «крот», работая самостоятельно, мог бы прорыть тоннель?

Решение. Пусть длина тоннеля l м, x — мощность 1-го «крота», y м/дн. — мощность 2-го. Условия дают следующие уравнения:

$$\begin{cases} (x+y)\cdot 5 = l, \\ \dfrac{l}{3x} + \dfrac{2l}{3y} = 10. \end{cases}$$

Нужно найти $\frac{l}{x}$ и $\frac{l}{y}$.

$$\begin{cases} \dfrac{x}{l} + \dfrac{y}{l} = \dfrac{1}{5}, \\ \dfrac{1}{3}\,\dfrac{l}{x} + \dfrac{2}{3}\,\dfrac{l}{y} = 10. \end{cases}$$

Обозначим $\frac{l}{x} = a$; $\frac{l}{y} = b$.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{5}, \\ \dfrac{a}{3} + \dfrac{2b}{3} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 30 - 2b, \\ \dfrac{1}{30-2b} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 30 - 2b, \\ 5b + 150 - 10b = 30b - 2b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 30 - 2b, \\ 2b^2 - 35b + 150 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 30 - 2b, \\ b_{1,\,2} = \dfrac{35 \pm \sqrt{1225 - 1200}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 30 - 2b, \\ b_1 = 10;\ b_2 = 7{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 10;\ a_2 = 15, \\ b_1 = 10;\ b_2 = 7{,}5. \end{cases}$$

Первая пара a и b не подходит, т. к. по условию «кроты» имеют разную мощность.

Ответ: за 15 и 7,5 дней.

20. Три автоматические линии выпускают одинаковую продукцию, но имеют разную производительность. Производительность всех трех одновременно действующих линий в 1,5 раза выше производительности 1-й и 2-й линий, работающих одновременно. Сменное задание для 1-й линии 2-я и 3-я линии, работая одновременно, могут выполнить на 4 ч 48 мин быстрее, чем его выполняет 1-я линия; это же задание 2-я линия выполняет на

2 часа быстрее, чем 1-я линия. Найти время выполнения 1-й линией своего сменного задания.

Решение. Допустим, A изделий — сменное задание первой линии; x, y и z изд./ч — производительность 1-й, 2-й и 3-й линий. Условия задачи приводят к системе уравнений:

$$\begin{cases} x+y+z=1{,}5(x+y), \\ \dfrac{A}{x}=\dfrac{A}{y+z}+4{,}8, \\ \dfrac{A}{x}=\dfrac{A}{y}+2. \end{cases}$$

Нужно найти $\dfrac{A}{x}$.

$$\begin{cases} z=\dfrac{x+y}{2}, \\ \dfrac{A}{x}=\dfrac{A}{y+\dfrac{x+y}{2}}+4{,}8, \\ \dfrac{A}{x}=\dfrac{A}{y}+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\dfrac{x+y}{2}, \\ \dfrac{A}{x}=\dfrac{2A}{3y+x}+4{,}8, \\ \dfrac{A}{x}=\dfrac{A}{y}+2. \end{cases}$$

Обозначим: $\dfrac{A}{x}=t$, тогда $\dfrac{A}{y}=t-2$.

$$t=\frac{2A}{3y+x}+4{,}8 \Rightarrow 3ty+tx=2A+14{,}4y+4{,}8x \Rightarrow 3ty+A=$$
$$=2A+14{,}4y+4{,}8\frac{A}{t} \Rightarrow 3t-\frac{A}{y}=14{,}4+4{,}8\frac{A}{yt} \Rightarrow 3t-(t-2)=$$
$$=14{,}4+4{,}8\frac{t-2}{t} \Rightarrow 2t+2=14{,}4+4{,}8-\frac{9{,}6}{t} \Rightarrow 2t^2+2t=$$
$$=19{,}2t-9{,}6 \Rightarrow 2t^2-17{,}2t+9{,}6=0 \Rightarrow t^2-8{,}6t+4{,}8=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t_{1,\,2}=4{,}3\pm\sqrt{18{,}49-4{,}8}=4{,}3\pm 3{,}7.$$

$t_1=8$ и $t_2=0{,}6$ — не подходит, т. к. $t>2$.

Ответ: 1-я линия выполнит свое задание за 8 часов.

21. Три сенокосилки участвовали в покосе травы с поля площадью 25 га. За 1 час 1-я сенокосилка скашивает 3 га, 2-я — на b га меньше 1-й, а 3-я — на $2b$ га больше 1-й. Сначала работали одновременно 1-я и 2-я сенокосилки и скосили 11 га, а затем оставшуюся часть площади скосили, работая одновременно, 1-я и 3-я сенокосилки. Определить значение b $(0<b<1)$, при котором все поле скошено за 4 часа, если работа велась без перерыва.

Решение. Известно, что производительность 1-й сенокосилки 3, 2-й $(3-b)$ и 3-й $(3+2b)$ га/ч. По условию

$$\frac{11}{3+3-b}+\frac{14}{3+3+2b}=4\Rightarrow\frac{11}{6-b}+\frac{14}{6+2b}=4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{11}{6-b}+\frac{7}{3+b}=4\Rightarrow 33+11b+42-7b=72+12b-4b^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4b^2-8b+3=0\Rightarrow b_{1,\,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{4}=\frac{4\pm2}{4}.$$

$0<b<1\Rightarrow b=\frac{1}{2}$.

Ответ: $b=\frac{1}{2}$.

22. Бригада рыбаков планировала выловить в определенный срок 1800 ц рыбы. В течение $\frac{1}{3}$ этого срока был шторм, вследствие чего плановое задание ежедневно недовыподнялось на 20 ц. Однако в остальные дни бригаде удавалось ежедневно вылавливать на 20 ц больше дневной нормы, и плановое задание было выполнено за 1 день до срока. Сколько центнеров рыбы планировалось вылавливать ежедневно?

Решение. Допустим, планировалось в течение n дней ежедневно вылавливать x ц рыбы. Тогда:

$$\begin{cases} xn=1800,\\ (x-20)\frac{n}{3}+(x+20)\left(\frac{2n}{3}-1\right)=1800\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} xn=1800,\\ \frac{xn}{3}-\frac{20n}{3}+\frac{2xn}{3}+\frac{40n}{3}-x-20=1800\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} xn=1800,\\ xn+\frac{20n}{3}-x=1820\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} n=\frac{1800}{x},\\ 1800+\frac{20\cdot1800}{3x}-x=1820.\end{cases}$$

$\frac{12\,000}{x}-x=20\Rightarrow x^2+20x-12\,000=0\Rightarrow x_1=100$ и $x_2=-120$ (не подходит, т. к. $x>0$).

Ответ: планировалось вылавливать 100 ц рыбы в день.

ЗАДАЧИ НА ЧАСТИ И ЧИСЛА

1. Найти число, если известно, что после вычитания из него $\frac{1}{6}$ его части и прибавления к полученной разности его пятой части получится 9,3.

Решение. Обозначим искомое число x.

По условию: $x-\frac{1}{6}x+\frac{1}{5}x=9{,}3$.

$$x \cdot \frac{30-5+6}{30} = 9{,}3 \Rightarrow x \cdot \frac{31}{30} = 9{,}3 \Rightarrow x \cdot \frac{3{,}1}{3} = 9{,}3 \Rightarrow x = 9.$$

Ответ: 9.

2. При разделке туши барана треть веса составляет туловище, одну пятую — голова, шестую часть — ноги, четверть — шкура и еще 6 кг — внутренности. Сколько весит целый баран?

Решение. Если вес целого барана 1, то $\left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{4}\right)$ — часть, которую составляют внутренности.

$$1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{4} = \frac{60-20-12-10-15}{60} = \frac{3}{60} = \frac{1}{20}.$$

$\frac{1}{20}$ туши — это 6 кг, следовательно, вся туша — это $6 \cdot 20 = 120$ кг.

Ответ: целый баран весит 120 кг.

3. Автомобиль выехал, имея на борту груз, составляющий $\frac{4}{5}$ его грузоподъемности. На 1-й остановке он выгрузил $\frac{1}{6}$ часть груза, на 2-й взял на борт $\frac{1}{3}$ своей грузоподъемности, на 3-й выгрузил $\frac{2}{3}$ привезенного груза. В результате в пункт прибытия он привез 5 т. Какова грузоподъемность автомобиля?

Решение. Пусть грузоподъемность автомобиля x т, тогда его первоначальный груз $\frac{4}{5}x$ т, после 1-й остановки его груз $\frac{4}{5}x - \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{6}x = \frac{4}{5}x \cdot \frac{5}{6} = \frac{2}{3}x$ т.

После 2-й остановки: $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x = x$.

После 3-й остановки: $x - \frac{2}{3}x = \frac{1}{3}x$.

По условию: $\frac{1}{3}x = 5 \Rightarrow x = 15$ т.

Ответ: грузоподъемность автомобиля 15 тонн.

4. Рыбу разрезали на 5 кусков в отношении по весу $14:12:11:9:15$, причем 2-й кусок весил 112 г. Сколько весила вся рыба?

Решение. 2-й кусок составляет 12 частей от всей рыбы, а вся рыба $14+12+11+9+15 = 61$ часть.

112 г соответствует 12-ти частям $\Rightarrow$ 1 часть — $\frac{112}{12} = \frac{28}{3}$ (г).

Вся рыба $\frac{28}{3} \cdot 61 = \frac{1708}{3} = 569\frac{1}{3}$ (г).

Ответ: вся рыба весила $569\frac{1}{3}$ г.

5. В двух колоннах по 28 автомобилей в каждой, было 11 «Жигулей», остальные — «Москвичи». Сколько «Москвичей» было в каждой колонне, если известно, что в 1-й из них на каждую машину «Жигули» приходилось в 2 раза больше «Москвичей», чем во 2-й?

Решение. Пусть в 1-й колонне x «Жигулей», тогда во 2-й $(11-x)$ «Жигулей».

	I колонна	II колонна
Всего машин	28	28
«Жигули»	x	$11-x$
«Москвич»	$28-x$	$17+x$

Запишем отношение:
$\frac{28-x}{x}=2\frac{17+x}{11-x}$.

$\frac{28-x}{x}=\frac{34+2x}{11-x}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(28-x)(11-x)=$ $=x(34+2x)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 308-39x+x^2=34x+$ $+2x^2\Leftrightarrow x^2+73x-308=0\Leftrightarrow x_{1,\,2}=\frac{-73\pm\sqrt{6561}}{2}\Leftrightarrow x=4.$

$28-4=24$ и $17+4=21$.

Ответ: в 1-й колонне 24 «Москвича», а во 2-й колонне 21.

6. Брат и сестра собрали каждый по 40 грибов, из них 52 белых. Сколько белых грибов собрал каждый, если известно, что отношение числа белых грибов к числу остальных грибов у брата в 4 раза больше, чем у сестры?

Решение. Допустим, брат собрал x белых грибов.

	Брат	Сестра
Всего грибов	40	40
Белых грибов	x	$52-x$
Остальных грибов	$40-x$	$x-12$

Составим отношение:
$\frac{x}{40-x}=4\frac{52-x}{x-12}$.

$\frac{x}{40-x}=\frac{208-4x}{x-12}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2-12x=$ $=8320-368x+4x^2\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3x^2-356x+8320=0\Leftrightarrow x_{1,\,2}=\frac{178\pm\sqrt{6724}}{3}\Leftrightarrow x_1=32$ и $x_2=\frac{260}{3}$ (не подходит); $52-32=20$.

Ответ: брат собрал 32 белых гриба, а сестра — 20.

7. Сумма цифр двузначного числа равна 12. Если к искомому числу прибавить 36, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти число.

Решение. Пусть двузначное число записано как $\overline{ab}$, т. е. a — число десятков, b — число единиц. Иначе это число можно записать как $10a+b$. Число с теми же цифрами, но записанными в обратом порядке: $10b+a$.

Из условий:

$$\begin{cases} a+b=12, \\ 10a+b+36=10b+a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=12-a, \\ 9a-9b=-36 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=12-a, \\ b-a=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=12-a, \\ 12-2a=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4, \\ b=8. \end{cases}$$

Ответ: число 48.

8. Числители трех данных дробей пропорциональны числам 1, 2 и 3, а обратные величины соответствующих знаменателей пропорциональны числам 1, $\frac{1}{3}$ и 0,2. Найти эти дроби, если их среднее арифметическое равно $\frac{136}{315}$.

Решение. Даны дроби: $\frac{a_1}{b_1}$; $\frac{a_2}{b_2}$; $\frac{a_3}{b_3}$.

Известно: $a_1 : a_2 : a_3 = 1:2:3$;

$$\frac{1}{b_1} : \frac{1}{b_2} : \frac{1}{b_3} = 1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{5} \Rightarrow b_1 : b_2 : b_3 = 1:3:5 \Rightarrow \frac{\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\frac{a_3}{b_3}}{3} =$$

$$= \frac{136}{315} \Rightarrow \frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\frac{a_3}{b_3} = \frac{136}{105}.$$

Из пропорции $\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a_2 = 2a_1$, из $\frac{a_1}{a_3} = \frac{1}{3} \Rightarrow a_3 = 3a_1$,

$\frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{3} \Rightarrow b_2 = 3b_1$, $\frac{b_1}{b_3} = \frac{1}{5} \Rightarrow b_3 = 5b_1$.

Отсюда $\frac{a_1}{b_1} + \frac{2a_1}{3b_1} + \frac{3a_1}{5b_1} = \frac{136}{105} \Rightarrow \frac{a_1}{b_1}\left(1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\right) = \frac{136}{105} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{34}{15} = \frac{136}{105} \Rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{4}{7}.$$

$$\frac{a_2}{b_2}+\frac{a_3}{b_3} = \frac{136}{105} - \frac{4}{7} \Rightarrow \frac{a_2}{b_2}+\frac{a_3}{b_3} = \frac{76}{105}.$$

$$\frac{a_2}{a_3} = \frac{2}{3} \Rightarrow a_3 = \frac{3a_2}{2}; \ \frac{b_2}{b_3} = \frac{3}{5} \Rightarrow b_3 = \frac{5b_2}{3}.$$

$$\frac{a_2}{b_2} + \frac{\frac{3a_2}{2}}{\frac{5b_2}{3}} = \frac{76}{105} \Rightarrow \frac{a_2}{b_2}\left(1+\frac{9}{10}\right) = \frac{76}{105} \Rightarrow \frac{a_2}{b_2} \cdot \frac{19}{10} = \frac{76}{105} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a_2}{b_2} = \frac{8}{21}.$$

$$\frac{a_3}{b_3} = \frac{76}{105} - \frac{8}{21} \Rightarrow \frac{a_3}{b_3} = \frac{12}{35}.$$

О т в е т: $\frac{4}{7}$, $\frac{8}{21}$ и $\frac{12}{35}$.

9. Вкладчик взял из банка сначала $\frac{1}{4}$ своих денег, потом $\frac{4}{9}$ оставшихся и еще 64 рубля. После этого у него осталось в банке $\frac{3}{20}$ всех его денег. Как велик был вклад?

Р е ш е н и е. Пусть вклад был x руб. Тогда сначала взято $\frac{1}{4}x$, осталось $\frac{3x}{4}$, потом взято $\frac{4}{9} \cdot \frac{3x}{4} + 64$ руб. По условию:

$$\frac{x}{4} + \frac{4}{9} \cdot \frac{3x}{4} + 64 = x - \frac{3x}{20} \Rightarrow x - \frac{3x}{20}x - \frac{1}{4}x - \frac{1}{3}x = 64 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\left(1 - \frac{3}{20} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) = 64 \Rightarrow x\frac{60 - 9 - 15 - 20}{60} = \frac{6}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\frac{16}{60} = 64 \Rightarrow x = 240.$$

О т в е т: вклад 240 рублей.

10. Сумма квадратов цифр двузначного числа равна 13. Если от этого двузначного числа отнять 9, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти число.

Р е ш е н и е. Дано число $\overline{ab}$, где a — число десятков, b — число единиц. По условию:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + 13, \\ 10a + b - 9 = 10b + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 13, \\ 9a - 9b = 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 13, \\ a = b + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b^2 + 2b - 12 = 0, \\ a = b + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2, \\ a = 3. \end{cases}$$

О т в е т: 32.

11. Площади трех участков земли находятся в отношении $2\frac{3}{4} : 1\frac{5}{6} : 1\frac{3}{8}$. Известно, что с 1-го участка собрано зерна на 72 ц больше, чем со 2-го. Найти общую площадь всех трех участков, если средняя урожайность составляет 18 ц/га.

Р е ш е н и е. Если x, y и z га — площади участков, то:

$$\begin{cases} x : y : z = \frac{11}{4} : \frac{11}{6} : \frac{11}{8}, \\ 18x - 18y = 72. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=4, \\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+4, \\ \dfrac{y+4}{y}=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+4, \\ y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=12, \\ y=8. \end{cases}$$

$$\frac{y}{z}=\frac{4}{3} \Rightarrow 4z=3y \Rightarrow z=\frac{3y}{4} \Rightarrow z=6.$$

$$x+y+z=26.$$

Ответ: общая площадь 26 га.

12. Первое из неизвестных чисел составляет 140% второго, а отношение первого к третьему равно $\frac{14}{11}$. Найти эти числа, если разность между 3-м и 2-м на 40 меньше числа, составляющего 12,5% суммы 1-го и 2-го чисел.

Решение. Обозначим неизвестные числа x, y, z. Запишем условия:

$$\begin{cases} x=\dfrac{140}{100}y, \\ \dfrac{x}{z}=\dfrac{14}{11}, \\ z-y+40=\dfrac{12{,}5}{100}(x+y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{5x}{7}, \\ z=\dfrac{11x}{14}, \\ \dfrac{11x}{14}-\dfrac{5x}{7}+40=\dfrac{x+\frac{5x}{7}}{8}. \end{cases}$$

$$\frac{x}{14}+40=\frac{12x}{56} \Rightarrow \frac{3x}{14}-\frac{x}{14}=40 \Rightarrow \frac{x}{7}=40 \Rightarrow x=280.$$

$$y=\frac{5\cdot 280}{7}=200;\ z=\frac{11\cdot 280}{14}=220.$$

Ответ: 280; 200; 220.

13. Определить целое положительное число по следующим данным: если к его цифровой записи присоединить справа цифру 4, получится число, делящееся без остатка на число, большее искомого на 4, а в частном получится число, меньшее делителя на 27.

Решение. Пусть искомое число n. При приписывании к нему справа цифры 4 получается число $10n+4$. Из условия

$$10n+4=(n+4)(n+4-27) \Rightarrow 10n+4=(n+4)(n-23) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 10n+4=n^2-19n-92 \Rightarrow n^2-29n-96=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n_{1,\,2}=\frac{29\pm\sqrt{841+384}}{2} \Rightarrow n_{1,\,2}=\frac{29\pm 35}{2};\ n>0 \Rightarrow n=32.$$

Ответ: 32.

14. Даны два двузначных числа, из которых 2-е обозначено теми же цифрами, что и 1-е, но в обратном порядке. Частное от деления 1-го числа на 2-е равно 1,75. Произведение 1-го числа на цифру его десятков в 3,5 раза больше 2-го числа. Найти эти числа.

Решение. Пусть 1-е число $(10a+b)$, а 2-е $(10b+a)$. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{10a+b}{10b+a}=1{,}75, \\ (10a+b)a=3{,}5(10b+a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{10a+b}{10b+a}=1{,}75, \\ \dfrac{10a+b}{10b+a}=\dfrac{3{,}5}{a}. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3{,}5}{a}=1{,}75 \Rightarrow a=\frac{3{,}5}{1{,}75} \Rightarrow a=2.$$

$$\frac{20+b}{10b+2}=1{,}75 \Rightarrow 20+b=17{,}5b+3{,}5 \Rightarrow 16{,}5b=16{,}5 \Rightarrow b=1.$$

Ответ: числа 21 и 12.

15. Было задано целое число. Требовалось увеличить его на 200 000 и полученное число утроить. Вместо этого приписали к цифровой записи числа справа цифру 2 и получили правильный результат. Какое число было задано?

Решение. Допустим, было задано число k. Тогда

$$(k+200\,000)\cdot 3=10k+2 \Rightarrow 3k+600\,000=10k+2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 7k=599\,998 \Rightarrow k=85\,714.$$

Ответ: число 85 714.

16. Найти два числа, сумма которых равна 44, причем меньшее число отрицательное. Процентное отношение разности между большим и меньшим числами к меньшему числу совпадает с меньшим числом.

Решение. Обозначим числа a и b, $b<0$.

Из условий следует:

$$\begin{cases} a+b=44, \\ \dfrac{a-b}{b}\cdot 100=b, \\ b<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=44-b, \\ (44-b-b)\cdot 100=b^2, \\ b<0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=44-b, \\ b^2+200b-4400=0, \\ b<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=44-b, \\ b_1=-220;\, b_2=20, \\ b<0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=264, \\ b=-220. \end{cases}$$

Ответ: 264 и -220.

17. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то получится в частном 4 и в остатке 3. Если же это число разделить на произведение его цифр, то получится в частном 3 и в остатке 5. Найти это число.

Решение. Пусть $10a+b$ — двузначное число. Условия дают два уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{10a+b}{a+b} = 4 + \dfrac{3}{a+b}, \\ \dfrac{10a+b}{ab} = 3 + \dfrac{5}{ab} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10a+b-3 = 4a+4b, \\ 10a+b-5 = 3ab \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6a-3b = 3, \\ 10a+b-5-3ab = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a-1, \\ 10a+2a-1-5-3a(2a-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a-1, \\ -6a^2+15a-6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a-1, \\ 2a^2-5a+2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a-1, \\ a_{1,\,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2,\ (a \text{ — цифра}). \\ b = 3. \end{cases}$$

Ответ: 23.

18. Однозначное число увеличили на 10. Если полученное число увеличить на столько же процентов, как в первый раз, то получится 72. Найти первоначальное число.

Решение. Пусть a — первоначальное число, $a+10$ — увеличенное число. По условию:

$$\begin{cases} a + x\%a = a+10, \\ a+10+x\%(a+10) = 72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\left(1+\dfrac{x}{100}\right) = a+10, \\ (a+10)\left(1+\dfrac{x}{100}\right) = 72 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+\dfrac{x}{100} = \dfrac{72}{a+10}, \\ a\dfrac{72}{a+10} = a+10. \end{cases}$$

$72a = a^2+20a+100 \Rightarrow a^2-52a+100 = 0 \Rightarrow a_1 = 2;\ a_2 = 50$ (не подходит, т. к. a — однозначное число).

Ответ: 2.

19. Найти четыре числа, образующих пропорцию, если известно, что сумма крайних членов равна 14, сумма средних членов равна 11, а сумма квадратов всех четырех чисел равна 221.

Решение. Дано: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$;

$$\begin{cases} a+d = 14, \\ b+c = 11, \\ a^2+b^2+c^2+d^2 = 221, \\ ad = bc \end{cases} \Leftrightarrow + \begin{cases} a^2+2ad+d^2 = 196, \\ b^2+2bc+c^2 = 121, \\ a^2+b^2+c^2+d^2 = 221, \\ ad = bc. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2+d^2+2ad+2bc=196+121, \\ a^2+b^2+c^2+d^2=221, \\ ad=bc \end{cases} \Rightarrow 4bc=96 \Rightarrow$$

$\Rightarrow bc=24$.

$$\begin{cases} b+c=11, \\ bc=24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=8, \\ c=3 \end{cases} \text{или} \begin{cases} b=3, \\ c=8. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+d=14, \\ ad=24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=12, \\ d=2 \end{cases} \text{или} \begin{cases} a=2, \\ d=12. \end{cases}$$

Получаем пропорцию: $\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$.

Возможны другие варианты, например:

$\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$ или $\frac{2}{8}=\frac{3}{12}$.

Ответ: числа: 2, 3, 8, 12.

20. Запись шестизначного числа начинается цифрой 2. Если эту цифру перенести с 1-го места на последнее, сохранив порядок остальных цифр, то вновь полученное число будет втрое больше првоначального. Найти первоначальное число.

Решение. Имеем число $\overline{2abcde}$, где a, b, c, d, e — цифры шестизначного числа, начиная со 2-й. Вновь полученное число будет $\overline{abcde2}$. Обозначим число $\overline{abcde}$ через n. Тогда первоначальное число $200\,000+n$, а вновь полученное $10n+2$. По условию

$$10n+2=3(200\,000+n) \Rightarrow 10n+2=600\,000+3n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 7n=599\,998 \Rightarrow n=85\,714.$$

Ответ: первоначальное число 285 714.

21. При умножении двух чисел, одно из которых на 10 больше другого, ученик допустил ошибку, уменьшив цифру десятков произведения на 4. При делении полученного произведения на меньший множитель для проверки ответа он получил в частном 39 и в остатке 22. Найти множители.

Решение. Пусть ученик умножал числа a и $a+10$. Можно записать:

$$\begin{cases} a(a+10)=b+40, \\ \frac{b}{a}=39+\frac{22}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=a^2+10a-40, \\ \frac{a^2+10a-40}{a}=\frac{39a+22}{a} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=a^2+10a-40, \\ a^2-29a-62=0. \end{cases}$$

Т. к. $a>0$, то $a=31$; $a+10=41$.

Ответ: множители 31 и 41.

ЗАДАЧИ С ЦЕЛОЧИСЛЕННЫМИ НЕИЗВЕСТНЫМИ

1. Некто купил 30 птиц за 30 монет. Из числа этих птиц за 3-х воробьев заплачена 1 монета, за 2-х горлиц — 1 монета, а за каждого голубя — 2 монеты. Сколько было куплено птиц каждой породы?

Решение. Пусть куплено x воробьев, y горлиц, z голубей. Из условия 1 воробей стоит $\frac{1}{3}$ монеты, 1 горлица — $\frac{1}{2}$ монеты, 1 голубь — 2 монеты. Поэтому имеем 2 уравнения:

$$\begin{cases} x + y + z = 30, \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y + 2z = 30. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 30, \quad \mid \cdot 2 \\ 2x + 3y + 12z = 180. \end{cases}$$

$$y + 10z = 120 \Rightarrow z = \frac{120 - y}{10}.$$

Т. к. z — целое число, то $(120 - y)$ должно делиться на 10, и, значит, y либо 10, либо 20 ($y < 30$).

1) $y = 10$; $z = 11$; $x = 9$.

2) $y = 20$; $z = 10$; $x = 0$ — невозможно, т. к. $x \neq 0$.

Ответ: 9 воробьев, 10 горлиц, 11 голубей.

2. Вася и Петя поделили между собой 39 орехов. Число орехов, доставшихся любому из них, меньше удвоенного числа орехов, доставшихся другому. Квадрат трети числа орехов, доставшихся Пете, меньше увеличенного на 1 числа орехов, доставшихся Васе. Сколько орехов у каждого?

Решение. Если у Васи x орехов, а у Пети y орехов, то имеем систему:

$$\begin{cases} x + y = 39, \\ x < 2y, \\ y < 2x, \\ \left(\frac{y}{3}\right)^2 < x + 1. \end{cases}$$

1) $x = 39 - y \Rightarrow \left(\frac{y}{3}\right)^2 < 40 - y \Rightarrow \frac{y^2}{9} < 40 - y \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2 + 9y - 360 < 0$. $y_{1,\,2} = \dfrac{-9 \pm \sqrt{81 + 1440}}{2} = \dfrac{-9 \pm 39}{2}$.

$y_1 = -24$; $y_2 = 15$.

Т. к. $y > 0$, то $0 < y < 15$.

2) $y = 39 - x \Rightarrow 39 - x < 15 \Rightarrow x > 24$.

$\dfrac{x}{2} < y < 2x \Rightarrow \dfrac{x}{2} < 39 - x < 2x \Rightarrow \dfrac{3x}{2} < 39 < 3x \Rightarrow$

$\Rightarrow 13 < x < 26$.

Отсюда, т. к. $24 < x < 26$ и x — целое число, то $x = 25$ и $y = 14$.

Ответ: у Васи 25 орехов, у Пети 14 орехов.

3. Около дома посажены липы и березы, причем их общее количество более 14. Если увеличить вдвое количество лип, а количество берез увеличить на 18, то берез станет больше, чем лип. Если увеличить вдвое количество берез, не изменяя количества лип, то лип все равно будет больше, чем берез. Сколько лип и сколько берез было посажено?

Решение. Если x — количество лип, а y — берез, то, исходя из условий, получаем:

$$+\begin{cases} x+y>14, \\ y+18>2x, \\ x>2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y>14, \\ x+y+18>2x+2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y>14, \\ x+y<18. \end{cases}$$

$$1) \begin{cases} x+y=15, \\ y>2x-18, \\ x>2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=15-x, \\ 15-x>2x-18, \\ x>30-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=15-x, \\ x<11, \\ x>10. \end{cases}$$

Это невозможно, т. к. x — целое число.

$$2) \begin{cases} x+y=16, \\ y>2x-18, \\ x>2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=16-x, \\ 16-x>2x-18, \\ x>32-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=16-x, \\ x\leqslant 11, \\ x\geqslant 10. \end{cases}$$

а) $x = 10$; $y = 6$, но $x > 2y$ не выполняется, т. к. $10 < 12$.

б) $x = 11$; $y = 5$, $11 > 10$.

$$3) \begin{cases} x+y=17, \\ y>2x-18, \\ x<2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=17-x, \\ 17-x>2x-18, \\ x>34-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=17-x, \\ x\leqslant 11, \\ x\geqslant 11. \end{cases}$$

$x = 11$; $y = 6$, но $x > 2y$ не выполняется, т. к. $11 < 12$.

Ответ: было посажено 11 лип и 5 берез.

4. Группа студентов, состоящая из 30 человек, получила на экзамене оценки 2, 3, 4 и 5. Сумма полученных оценок равна 93, причем «троек» было больше, чем «пятерок», и меньше, чем «четверок». Кроме того, число «четверок» делится на 10, а число «пятерок» — четное. Определить, сколько каких оценок получила группа.

Решение. Пусть a, b, c и d — числа «двоек», «троек», «четверок» и «пятерок» соответственно.

Из условий имеем:

$$\begin{cases} a+b+c+d=30, \\ 2a+3b+4c+5d=93, \\ d<b<d, \\ c=10k, \\ d=2n. \end{cases}$$

1) $-\begin{cases} 2a+2b+2c+2d=60, \\ 2a+3b+4c+5d=93. \end{cases} \Leftrightarrow$

$b+2c+3d=33 \Rightarrow b=33-2c-3d$.

Т. к. $b>0$, $d>0$, то $c=10$;

$b=13-3d$.

2) $\begin{cases} b=13-3d, \\ b>d \end{cases} \Leftrightarrow 13-3d>d \Rightarrow 4d<13 \Rightarrow d\leqslant 3,$ но $d=2n \Rightarrow d=2$.

$$\begin{cases} a+b+10+2=30, \\ 2a+3b+40+10=93 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=18, \\ 2a+3b=43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=11, \\ b=7. \end{cases}$$

Ответ: 11 «двоек»; 7 «троек»; 10 «четверок»; 2 «пятерки».

5. Четыре школьника сделали в магазине канцтоваров следующие покупки: 1-й купил пенал и ластик за 40 руб., 2-й купил ластик и карандаш за 12 руб., 3-й купил пенал, карандаш и 2 тетради за 50 руб., 4-й купил пенал и тетрадь. Сколько заплатил 4-й школьник?

Решение. Обозначим стоимость товаров:

Пенал	Ластик	Карандаш	Тетрадь
x	y	z	t

По условию:

$$-\begin{cases} x+y=40, \\ y+z=12, \\ x+z+2t=50, \end{cases} \quad +\begin{cases} x-z=28, \\ x+z+2t=50 \end{cases} \Leftrightarrow 2x+2t=78 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x+t=39$.

Ответ: 4-й школьник заплатил 39 рублей.

6. Рота солдат прибыла на парад в полном составе прямоугольным строем по 24 человека в ряд. По прибытии оказалось, что не все солдаты могут участвовать в параде. Оставшийся для парада состав роты перестроили так, что число рядов стало на 2 меньше прежнего, а число солдат в каждом ряду стало на 26 больше числа новых рядов. Известно, что если бы все солдаты участвовали в параде, то роту можно было бы выстроить так, чтобы число солдат в каждом ряду равнялось числу рядов. Сколько солдат было в роте?

Решение. Допустим, в строю солдат было x рядов, тогда солдат было $24x$ человек. На параде число рядов стало $(x-2)$, а солдат в ряду $(x-2+26)$. Известно, что

$$\begin{cases} (x-2)(x+24) < 24x, \\ 24x = y^2. \end{cases}$$

$x^2 - 2x - 48 < 0 \Rightarrow (x+6)(x-8) < 0 \Rightarrow -6 < x < 8$, но $x \geqslant 1 \Rightarrow 1 \leqslant x < 8$, т. е. x может равняться одному из чисел: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7, но $24x$ должно быть полным квадратом. Проверяя, получим, что только $24 \cdot 6 = 144 = 12^2$. Поэтому $x = 6$.

Ответ: в роте было 144 человека.

7. На заводе было несколько одинаковых прессов, штампующих детали, и завод выпускал 6480 деталей в день. После реконструкции все прессы заменили на более производительные, но также одинаковые, а их количество увеличилось на 3. Завод стал выпускать в день 11 200 деталей. Сколько прессов было первоначально?

Решение. Пусть было n прессов и стало $(n+3)$; x и y дет./дн. — старая и новая производительности прессов; $y > x$. Тогда можно записать:

$$\begin{cases} xn = 6480, \\ y(n+3) = 11\,200. \end{cases} \quad n,\ x,\ y \text{ — целые числа.} \quad \begin{cases} x = \dfrac{6480}{n}, \\ y = \dfrac{11\,200}{n+3}. \end{cases}$$

Если 6480 делится на n, то 11 200 делится на $n+3$.

Разложим числа 6480 и 11 200 на множители:

6480	2	11 200	2
3240	2	5600	2
1620	2	2800	2
810	2	1400	2
405	3	700	2
135	3	350	2
45	3	175	5
15	3	35	5
5	5	7	7
1		1	

Будем подбирать возможные делители для 6480 и 11 200.

1) $\begin{array}{l} n=2, \\ n+3=5 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{6480}{2}=3240, \\ y=\dfrac{11\,200}{5}=2240 \end{cases}$ — не годится, т. к. $y<x$.

2) $\begin{array}{l} n=3, \\ n+3=6 \end{array}$ — не является делителем 11 200.

3) $\begin{array}{l} n=4, \\ n+3=7 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{6480}{4}=1620, \\ y=\dfrac{11\,200}{7}=1600 \end{cases}$ — не годится, т. к. $y<x$.

4) $\begin{array}{l} n=5, \\ n+3=8 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{6480}{5}=1296, \\ y=\dfrac{11\,200}{8}=1400 \end{cases}$ — годится, т. к. $y>x$.

Ответ: первоначально было 5 прессов.

8. Производительность 1-го автомобильного завода не превышает 950 машин в сутки. Производительность 2-го автомобильного завода первоначально составляла 95% от производительности 1-го. После ввода дополнительной линии 2-й завод увеличил производство машин в сутки на 23% от числа машин, выпускаемых в сутки на 1-м заводе, и стал их выпускать более 1000 штук в сутки. Сколько автомобилей за сутки выпускал каждый завод до реконструкции 2-го завода? Предполагается, что каждый завод в сутки выпускает целое количество машин.

Решение. Пусть p — производительность 1-го завода и q маш./сут. — производительность 2-го завода до реконструкции. Тогда

$$\begin{cases} p\leqslant 950, \\ q=0{,}95p, \\ p+0{,}23p>1000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q=0{,}95p, \\ p\leqslant 950, \\ p>\dfrac{1000}{1{,}23} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=0{,}95p, \\ 813\leqslant p\leqslant 950. \end{cases}$$

$0{,}23p$ и $0{,}95p$ должны быть целыми числами; $\Rightarrow p$ должно делиться на 100; $\dfrac{95p}{100}=\dfrac{19p}{20} \Rightarrow p$ должно делиться на 20. Если p делится на 100, то оно делится и на 20. Поэтому $p=900$ и $q=0{,}95\cdot 900=855$.

Ответ: 900 машин в сутки и 855 машин в сутки.

9. Трое мальчиков хотели вместе купить две одинаковые игрушки. Сложив все имеющиеся у них деньги, дети не могли купить даже одну игрушку. Если бы у 1-го мальчика было вдвое больше денег, то им на покупку 2-х игрушек не хватило бы

34 руб. Когда 3-му мальчику добавили денег в размере в 2 раза большем, чем у него было, то после покупки игрушек у детей оставалось 6 руб. Сколько стоили игрушки, если первоначально у 2-го мальчика было на 9 руб. больше, чем у 1-го?

Решение. Пусть у мальчиков было x, y и z руб., а одна игрушка стоила a руб. Тогда условия дают нам систему:

$$\begin{cases} x+y+z<a, \\ 2x+y+z=2a-34, \\ x+y+3z=2a+6, \\ y-x=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+9+z<a, \\ 3x+9+z=2a-34, \\ 2x+9+3z=2a+6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2z-x=40, \\ 2x+9+z<a, \\ 2x+9+3z=2a+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2z-40, \\ 5z-71<a, \\ 7z=2a+77 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z>20, \\ z<\dfrac{a+71}{5}, \\ z=\dfrac{2a}{7}+11. \end{cases}$$

Отсюда следует, что a должно делиться на 7 и $\dfrac{2a}{7}>9 \Rightarrow$ $\Rightarrow a \geqslant 31 \Rightarrow a=35$.

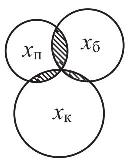
$a=21$; $20<z<\dfrac{35+71}{5}=\dfrac{106}{5}\cdot 2a=70$.

Ответ: игрушки стоили 70 рублей.

10. Строительная бригада состоит из 32 человек, каждый из которых владеет одной или двумя строительными профессиями: каменщик, бетонщик, плотник. Людей, владеющих профессией плотника, в бригаде в 2 раза больше, чем людей, владеющих профессией бетонщика, и в n раз меньше, чем людей, владеющих профессией каменщика, причем $3 \leqslant n \leqslant 20$ (n — целое число). Сколько человек в бригаде владеет только одной профессией, если число людей, владеющих двумя профессиями, на 2 больше, чем число людей, владеющих профессией плотника?

Решение. Обозначим: $x_п$ — количество плотников; $x_б$ — количество бетонщиков; $x_к$ — количество каменщиков; x_2 — число людей, владеющих 2-мя профессиями; x_1 — число людей, владеющих одной профессией. Из условий:

$$\begin{cases} x_п=2x_б, \\ x_п=\dfrac{x_к}{n},\ 3\leqslant n\leqslant 20, \\ x_1+x_2=32, \\ x_2=x_п+2. \end{cases}$$



Изобразим множества плотников, бетонщиков и каменщиков в виде пересекающихся кругов, где общие части кругов — это люди, владеющие какими-то 2-мя профессиями.

Видно, что $32 = x_п + x_б + x_к - x_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 32 = \cancel{x_п} + x_б + x_к - \cancel{x_п} - 2 \Rightarrow x_б + x_к = 34.$

$\frac{x_п}{2} + nx_п = 34 \Rightarrow x_п(2n+1) = 68 \Rightarrow x_п = \frac{68}{2n+1}.$

Т. к. $x_п$ — целое число, 68 должно делиться на нечетное число $2n+1$, где $3 \leqslant n \leqslant 20$. Нетрудно догадаться, что

$2n+1 = 17 \Rightarrow 2n = 16 \Rightarrow n = 8.$ $x_п = \frac{68}{17} = 4 \Rightarrow x_2 = 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_1 = 26.$

Ответ: 26 человек.

11. Две бригады землекопов вырыли по одинаковому котловану, причем 2-я бригада работала на полчаса больше 1-й. Если бы в 1-й бригаде было на 5 человек больше, то она могла бы закончить работу на 2 часа раньше. Определить число землекопов в каждой бригаде, если производительность у них одинакова.

Решение. Пусть в 1-й бригаде x, а во 2-й — y человек; 1-я бригада работала t, тогда 2-я брагада работала $(t+0{,}5)$ часов. Условия задачи приводят к системе:

$$\begin{cases} xt = y(t+0{,}5), \\ (x+5)(t-2) = xt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{xt}{t+0{,}5}, \\ \cancel{xt} + 5t - 2x - 10 = \cancel{xt} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{xt}{t+0{,}5}, \\ x = \dfrac{5}{2}t - 5. \end{cases}$$

Т. к. x — целое число, t должно быть целым, четным и $t > 2$. y — также целое число.

1) $t = 4$; $x = 5$; $y = \frac{20}{4{,}5}$ не годится.

2) $t = 6$; $x = 10$; $y = \frac{60}{6{,}5}$ не годится.

3) $t = 8$; $x = 15$; $y = \frac{120}{8{,}5}$ не годится.

4) $t = 10$; $x = 20$; $y = \frac{200}{10{,}5}$ не годится.

5) $t = 12$; $x = 25$; $y = \frac{25 \cdot 12}{12{,}5} = 24.$

Ответ: 25 человек и 24 человека.

12. Три комбайна разной производительности убрали урожай с участка за 1 ч 12 мин. За сколько часов убрал бы урожай каждый из них в отдельности, если известно, что это число часов целое (для каждого комбайна)?

Р е ш е н и е. Пусть площадь участка A га, Ax, Ay, Az га/ч — производительности комбайнов, где x, y, z — части участка, убираемые за 1 час. $x \neq y \neq z$. Тогда $A(x+y+z) = \dfrac{A}{\frac{6}{5}} \Rightarrow$ $\Rightarrow x+y+z = \dfrac{5}{6}$.

Если бы комбайны работали отдельно, то 1-й комбайн убрал бы урожай за $\dfrac{A}{Ax} = \dfrac{1}{x}$, 2-й комбайн — за $\dfrac{1}{y}$, 3-й — за $\dfrac{1}{z}$ ч., где $\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{1}{y}$, $\dfrac{1}{z}$ — целые числа. Значит, x, y и z — дроби, у которых в числителе 1.

Нужно $\dfrac{5}{6}$ представить в виде суммы трех таких дробей.

Допустим, $x = \dfrac{1}{2}$, тогда $y+z = \dfrac{5}{6} - \dfrac{1}{2} \Rightarrow y+z = \dfrac{1}{3}$.

Допустим $y = \dfrac{1}{4}$, тогда $z = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} \Rightarrow z = \dfrac{1}{12}$; $\dfrac{1}{x} = 2$; $\dfrac{1}{y} = 4$; $\dfrac{1}{z} = 12$.

О т в е т: 2 часа, 4 часа и 12 часов.

13. Найти все натуральные трехзначные числа, каждое из которых обладает следующими двумя свойствами:

1) первая цифра числа в 3 раза меньше последней его цифры;

2) сумма самого числа с числом, получающимся из него перестановкой второй и третьей его цифр, делится на 8 без остатка.

Р е ш е н и е. Имеем число $\overline{abc}$, т. е. $100a + 10b + c$; $c = 3a$.

По условию

$100a + 10b + c + 100a + 10c + b = 8k \Rightarrow$
$\Rightarrow 100a + 10b + 3a + 100a + 30a + b = 8k \Rightarrow 200a + 11b + 33a =$
$= 8k \Rightarrow 233a + 11b = 8k$.

Т. к. c — цифра от 0 до 9, то a может быть 1, 2 или 3, соответственно c — 3, 6 или 9; b — 0, …, 9.

1) $a = 1$,

$233 + 11b = 8k \Rightarrow 232 + 11b + 1 = 8k \Rightarrow 29 + \dfrac{11b+1}{8} = k$, т. е. $11b + 1$ должно делиться на 8. Это происходит при $b = 5$. Получаем число 153.

2) $a = 2$,

$466 + 11b = 8k \Rightarrow 464 + 11b + 2 = 8k \Rightarrow 58 + \dfrac{11b+2}{8} = k$, т. е. $11b + 2$ должно делиться на $8 \Rightarrow b = 2$. Получаем число 226.

3) $a = 3$,

$699 + 11b = 8k \Rightarrow 696 + 11b + 3 = 8k \Rightarrow 87 + \dfrac{11b+3}{8} = k$, т. е. $11b + 3$ должно делиться на $8 \Rightarrow b = 7$. Получаем число 379.

Ответ: 153; 226; 379.

ЗАДАЧИ, РЕШАЕМЫЕ С ПОМОЩЬЮ НЕРАВЕНСТВ

1. Расстояние между станциями A и B равно 360 км. В одно и то же время из A и из B навстречу друг другу выезжают два поезда. Поезд из A прибывает в B не ранее, чем через 5 часов. Если бы его скорость была в 1,5 раза больше, чем на самом деле, то он встретил бы поезд из B раньше, чем через 2 часа после своего выхода из A. Скорость какого поезда больше?

Решение. Пусть скорость поезда из A x, а скорость поезда из B y км/ч. Запишем неравенства:

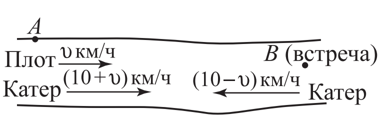
$$\begin{cases} \dfrac{360}{x} \geqslant 5, \\ \dfrac{360}{1{,}5x + y} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x \leqslant 360, \\ 1{,}5x + y > 180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 72, \\ 1{,}5x + y > 180 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1{,}5x \leqslant 108, \\ 1{,}5x + y > 180 \end{cases} \Leftrightarrow + \begin{cases} 108 \geqslant 1{,}5x, \\ 1{,}5x + y > 180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 72, \\ y > 72. \end{cases}$$

Ответ: скорость поезда из B больше.

2. От пристани A вниз по реке, скорость течения которой равна v км/ч, отходит плот. Через час вслед за ним выходит катер, скорость которого в стоячей воде равна 10 км/ч. Догнав плот, катер возвращается обратно. Определить все те значения v, при которых к моменту возвращения катера в A плот проходит более 15 км.

Решение.



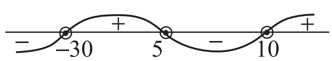
За 1 час плот проплыл v км, т. к. двигался со скоростью течения v км/ч. Разница скоростей катера и плота при движении по течению $10 + v - v = 10$ км/ч. Время движения катера до встречи с плотом $\dfrac{v}{10}$ ч. После 1 часа движения плот проплыл еще $v\dfrac{v}{10}$ км, т. е. $\dfrac{v^2}{10}$ км. Таким образом, общий путь плота до встречи $\left(v + \dfrac{v^2}{10}\right)$ км. Этот же путь должен проделать катер при движении обратно к пристани

A. Время обратного движения катера равно $\dfrac{v+\frac{v^2}{10}}{10-v}=\dfrac{v^2+10v}{10(10-v)}$ ч., т. к. скорость катера против течения равна $(10-v)$ км/ч. За это время плот уйдет на расстояние $v\dfrac{v^2+10v}{10(10-v)}=\dfrac{v^3+10v^2}{10(10-v)}$ км. Общий путь плота

$$v+\frac{v^2}{10}+\frac{v^3+10v^2}{10(10-v)}=\frac{100v-\cancel{10v^2}+\cancel{10v^2}-\cancel{v^3}+\cancel{v^3}+10v^2}{10(10-v)}=$$
$$=\frac{10(v^2+10v)}{10(10-v)}=\frac{v^2+10v}{10-v}.$$

По условию $\dfrac{v^2+10v}{10-v}>15\Rightarrow\dfrac{v^2+10v-150+15v}{10-v}>0\Rightarrow$ $\Rightarrow\dfrac{v^2+25v-150}{v-10}<0\Rightarrow\dfrac{(v+30)(v-5)}{v-10}<0.$

Метод интервалов:



Т. к. $v>0$, $5<v<10$.

О т в е т: $5<v<10$.

3. Три друга решили купить одну книгу. Первому не хватало для покупки книги 14 руб, второму — 37 руб., а третьему — 25 руб. Когда они сложили свои деньги вместе, то полученной суммы им также не хватило. Сколько стоит книга?

Р е ш е н и е. Пусть книга стоит A рублей; x руб. было у 1-го друга, y руб. — у 2-го и z руб. у 3-го. Из условий получаем

$$+\begin{cases}x+14=A,\\ y+37=A,\\ z+25=A,\\ x+y+z<A.\end{cases}$$

$x+y+z+76=3A\Rightarrow x+y+z=3A-76\Rightarrow 3A-76<A\Rightarrow$ $\Rightarrow 2A<76\Rightarrow A<38.$

Но $A\geqslant 37\Rightarrow A=37$.

О т в е т: книга стоит 37 рублей.

4. В двух бригадах вместе более 27 человек. Число членов 1-й бригады более чем в 2 раза превышает число членов 2-й, уменьшенное на 12. Число членов 2-й бригады более чем в 9 раз превышает число членов 1-й, уменьшенное на 10. Сколько человек в каждой бригаде?

Решение. Допустим, в 1-й бригаде x, а во 2-й — y чел. Тогда

$$\begin{cases} x+y>27, \\ \dfrac{x}{y-12}>2, \\ \dfrac{y}{x-10}>9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y>27, \\ x>2y-24, \\ y>9x-90, \\ x>10, \\ y>12. \end{cases}$$

Известно, что можно складывать неравенства одного знака. Берем 2-е и 3-е неравенства.

$$\left.\begin{cases} -x<-2y+24, \\ 9x<y+90 \end{cases}\right| \cdot 2 \quad \Leftrightarrow + \begin{cases} -x<-2y+24, \\ 18x<2y+180. \end{cases}$$

$17x<204 \Rightarrow x<12$, но $x>10$.

Т. к. x — целое число, то $x=11$. Берем 1-е и 2-е неравенства:

$$\begin{cases} y>27-x, \\ 2y<x+24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y>16, \\ y\leqslant 17 \end{cases} \Leftrightarrow y=17.$$

Ответ: 11 человек и 17 человек.

5. Двум бригадам общей численностью 18 человек было поручено организовать в течение 3 суток непрерывное дежурство по одному человеку. Первые двое суток дежурили члены 1-й бригады, распределив между собой это время поровну. Известно, что во 2-й бригаде 3 девушки, а остальные юноши, причем девушки дежурили по 1 часу, а все юноши распределили между собой остаток дежурства поровну. При подсчете оказалось, что общая продолжительность дежурства каждого юноши 2-й бригады и любого члена 1-й бригады меньше 9 часов. Сколько человек в каждой бригаде?

Решение. Пусть в 1-й бригаде x, а во 2-й — y чел. Тогда получим $x+y=18$; общее время дежурства $3\cdot 24=72$ ч.

$\dfrac{48}{x}$ ч — время дежурства одного человека 1-й бригады.

Т. к. 3 девушки 2-й бригады дежурили 3 часа, то юноши 2-й бригады дежурили $24-3=21$ ч.

$\dfrac{21}{y-3}$ ч — время дежурства одного юноши 2-й бригады.

$$\begin{cases} y=18-x, \\ \dfrac{48}{x}+\dfrac{21}{y-3}<9 \end{cases} \Rightarrow \frac{48}{x}+\frac{21}{15-x}<9 \Rightarrow 720-48x+21x<$$

$$<135x-9x^2 \Rightarrow 9x^2-162x+720<0 \Rightarrow x^2-18x+80<0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (x-8)(x-10)<0 \Rightarrow 8<x<10 \Rightarrow x=9$ (x — целое число).

Ответ: в каждой бригаде 9 человек.

6. Груз вначале погрузили в вагоны вместимостью по 80 тонн, но один вагон оказался загружен неполностью. Тогда весь груз переложили в вагоны вместимостью по 60 тонн, однако понадобилось на 8 вагонов больше и при этом все равно один вагон оказался неполностью загруженным. Наконец, груз переложили в вагоны вместимостью по 50 тонн, однако понадобилось еще на 5 вагонов больше, при этом все такие вагоны были загружены полностью. Сколько тонн груза было?

Решение. Пусть было A тонн груза и x — первоначальное количество вагонов.

Из условий

$$\begin{cases} x-1<\dfrac{A}{80}<x, \\ x+7<\dfrac{A}{60}<x+8, \\ \dfrac{A}{50}=x+13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=50x+650, \\ x-1<\dfrac{50x+650}{80}<x, \\ x+7<\dfrac{50x+650}{60}<x+8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A=50x+650, \\ 80x-80<50x+650<80x, \\ 60x+420<50x+650<60x+480 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A=50x+650, \\ 30x-80<650<30x, \\ 170<10x<230 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=50x+650, \\ 30x>650, \\ x<23 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A=50x+650, \\ 21<x<23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=22, \\ A=1750. \end{cases}$$

Ответ: было 1750 тонн груза.

7. В двух ящиках находится более 29 одинаковых деталей. Число деталей в 1-м ящике, уменьшенное на 2, более чем в 3 раза превышает число деталей во 2-м. Утроенное число деталей в 1-м ящике превышает удвоенное число деталей во 2-м, но менее чем на 60. Сколько деталей в каждом ящике?

Решение. Если в 1-м ящике x, а во 2-м y деталей, то

$$\begin{cases} x+y>29, \\ x-2>3y, \\ 3x>2y, \\ 2y+60>3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>29-y, \\ x>3y+2, \\ x>\dfrac{2}{3}y, \\ x<\dfrac{2}{3}y+20. \end{cases}$$

$$29-y<\frac{2}{3}y+20 \Rightarrow \frac{5}{3}y>9 \Rightarrow y>\frac{27}{5}.$$

$3y+2<\dfrac{2}{3}y+20 \Rightarrow \dfrac{7}{3}y<18 \Rightarrow y<\dfrac{54}{7}.$

$5\dfrac{2}{5}<y<7\dfrac{5}{7}.$

Поэтому $y=6$ или 7.

1) $y=6$.

$$\begin{cases} x+6>29, \\ x-2>18, \\ 3x>12, \\ 3x<72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>23, \\ x>20, \\ x>3, \\ x<24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>23, \\ x<24. \end{cases}$$

Т. к. x — целое число, система несовместна.

2) $y=7$;

$$\begin{cases} x+7>29, \\ x-2>21, \\ 3x>14, \\ 3x<74 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>22, \\ x>23, \\ x\geqslant 4, \\ x\leqslant 24 \end{cases} \Leftrightarrow x=24.$$

Ответ: 24 и 7 деталей.

8. Группа людей построена в колонну по 8 человек в ряд, но один ряд неполный. Если эту группу перестроить по 7 человек в ряд, то все ряды будут полными, но их число увеличится на 2. Если эту группу построить по 5 человек в ряд, то рядов будет еще на 7 больше, и один ряд опять будет неполным. Сколько всего людей в группе?

Решение. Пусть в группе k человек и первоначально было n рядов. Тогда

$$\begin{cases} n-1<\dfrac{k}{8}<n, \\ \dfrac{k}{7}=n+2, \\ n+8<\dfrac{k}{5}<n+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=7n+14, \\ n-1<\dfrac{7x+14}{8}<n, \\ n+8<\dfrac{7n+14}{5}<n+9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8n-8<7n+14<8n, \\ 5n+40<7n+14<5n+45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14<n<22, \\ 26<2n<31 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$14<n<15{,}5 \Leftrightarrow n=15.$

$k=7\cdot 15+14=119.$

Ответ: в группе 119 человек.

Прогрессии

Множество чисел, каждое из которых снабжено своим номером, называется **числовой последовательностью**. Элементы этого числового множества называются **членами последовательности**. Числовая последовательность обычно обозначается малой латинской буквой с номером; например x_1, x_2, x_3, …, x_n, … Формула, позволяющая вычислить любой член последовательности по его номеру, называется **формулой общего члена последовательности**. Последовательность может быть **конечной** и **бесконечной**. Например, последовательность цифр конечна и состоит из 10 цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, последовательность натуральных чисел бесконечна.

Последовательность называется **возрастающей**, если для всех $n \in N$ $x_{n+1} > x_n$, и **убывающей**, если для всех $n \in N$ $x_{n+1} < x_n$. Соответственно, **неубывающая** и **невозрастающая** последовательности определяются так: при всех $n \in N$ $x_{n+1} \geqslant x_n$, либо $x_{n+1} \leqslant x_n$.

Пример. Доказать, что последовательность, заданная формулой общего члена $x_n = \dfrac{3n-1}{5n+2}$, — возрастающая.

Решение.

$$x_{n+1} = \frac{3(n+1)-1}{5(n+1)+2} = \frac{3n+2}{5n+7};\ x_{n+1} - x_n = \frac{3n+2}{5n+7} - \frac{3n-1}{5n+2} =$$
$$= \frac{(3n+2)(5n+2)-(3n-1)(5n+7)}{(5n+7)(5n+2)} =$$
$$= \frac{\cancel{15n^2} + \cancel{10n} + \cancel{6n} + 4 - \cancel{15n^2} - \cancel{21n} + \cancel{5n} + 7}{(5n+7)(5n+2)} = \frac{11}{(5n+7)(5n+2)};$$

$\dfrac{11}{(5n+7)(5n+2)} > 0$, т. к. $n \in N \Rightarrow x_{n+1} > x_n$ при всех $n \in N$, и прогрессия возрастающая.

Если последовательность чисел подчиняется закону: $a_{k+1} = a_k + d$, где a_k, a_{k+1} — два соседних члена последовательности, а d — разность между ними, постоянная для всех таких соседних чисел, то эта последовательность называется **арифметической прогрессией**,

a_n — n-й член арифметической прогрессии;

d — разность арифметической прогрессии;

$a_n = a_1 + (n-1)d$.

Сумма n членов арифметической прогрессии определяется по формулам:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\, n; \quad S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2}\, n.$$

Признак арифметической прогрессии формулируется так: каждый член арифметической прогрессии, начиная со 2-го, есть среднее арифметическое соседних с ним чисел:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Если последовательность чисел подчиняется закону: $b_{k+1} = b_k q$, где b_k и b_{k+1} — два соседних члена последовательности, а $q \neq 0$ — постоянное для этой последовательности число, то это **геометрическая прогрессия**. Если $q = 1$, то все члены прогрессии равны между собой. В этом случае прогрессия является постоянной последовательностью.

b_n — n-й член геометрической прогрессии;

q — знаменатель геометрической прогрессии;

$b_n = b_1 q^{n-1}$.

Сумма n членов геометрической прогрессии определяется по формулам:

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1}; \quad S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}.$$

Если $q = 1$, то $S_n = nb_1$.

Геометрическая прогрессия, у которой $|q| < 1$, называется *бесконечно убывающей*, а ее сумма определяется по формуле:

$$S = \frac{b_1}{1-q}.$$

Признак геометрической прогрессии имеет формулировку: каждый член геометрической прогрессии, начиная со 2-го, есть среднее геометрическое соседних с ним чисел:

$$b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}.$$

ЗАДАЧИ НА ПРОГРЕССИИ

1. В арифметической прогрессии $a_1 = 1{,}2$; $a_4 = 1{,}8$. Найти S_6.

Решение. $S_6 = \dfrac{2a_1 + 5d}{2} \cdot 6$; нужно найти d.

$a_4 = a_1 + 3d \Rightarrow 3d = a_4 - a_1 \Rightarrow d = \dfrac{a_4 - a_1}{3}$.

$d = \dfrac{1{,}8 - 1{,}2}{3} \Rightarrow d = 0{,}2$. $S_6 = \dfrac{2 \cdot 1{,}2 + 5 \cdot 0{,}2}{2} \cdot 6 \Rightarrow S_6 = 10{,}2$.

Ответ: 10,2.

2. Найти сумму всех двузначных положительных чисел.

Решение. Эти числа образуют арифметическую прогрессию, у которой $a_1 = 10$; $d = 1$; $a_n = 99$.

$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 99 = 10 + (n-1) \cdot 1 \Rightarrow n - 1 = 89 \Rightarrow \Rightarrow n = 90$.

$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} n \Rightarrow S_{90} = \dfrac{10 + 99}{2} \cdot 90 \Rightarrow S_{90} = 4905$.

Ответ: 4905.

3. Сумма 4-го и 6-го членов арифметической прогрессии равна 14. Найти сумму первых девяти членов прогрессии.

Решение. $a_4 + a_6 = 14 \Rightarrow a_1 + 3d + a_1 + 5d = 14 \Rightarrow \Rightarrow 2a_1 + 8d = 14 \Rightarrow a_1 + 4d = 7$.

$S_9 = \dfrac{2a_1 + 8d}{2} \cdot 9 = (a_1 + 4d) \cdot 9 = 7 \cdot 9 = 63$.

Ответ: 63.

4. Знаменатель геометрической прогрессии равен -2, сумма ее первых пяти членов равна 5,5. Найти пятый член прогрессии.

Решение. $S_5 = 5{,}5$; $q = -2$.

$S_5 = \dfrac{b_1(q^5 - 1)}{q - 1} \Rightarrow 5{,}5 = \dfrac{b_1(-33)}{-3} = 5{,}5 \Rightarrow 11b_1 = 5{,}5 \Rightarrow b_1 = 0{,}5$.

$b_5 = b_1 q^4 \Rightarrow b_5 = 0{,}5 \cdot (-2)^4 = 8$.

Ответ: 8.

5. В геометрической прогрессии $b_1 = 150$, $b_4 = 1{,}2$. Найти b_5.

Решение. $b_4 = b_1 q^3 \Rightarrow 1{,}2 = 150q^3 \Rightarrow q^3 = \dfrac{1{,}2}{150} \Rightarrow q^3 = = 0{,}008 \Rightarrow q = 0{,}2$.

$b_5 = b_4 \cdot q = 1{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}24$.

Ответ: 0,24.

6. Найти сумму всех трехзначных натуральных чисел, которые при делении на 5 дают остаток 1.

Решение. Все такие числа образуют арифметическую прогрессию, в которой $a_1 = 101$; $d = 5$; $a_n = 996$.

$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 996 = 101 + (n-1) \cdot 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow n - 1 = \dfrac{996 - 101}{5} \Rightarrow n - 1 = 179 \Rightarrow n = 180$.

$S_{180} = \dfrac{a_1 + a_{180}}{2} \cdot 180 = \dfrac{101 + 996}{2} \cdot 180 = 98\,730$.

Ответ: 98 730.

7. Сколько имеется двузначных натуральных чисел, кратных 6?

Решение. 1-е двузначное число, кратное 6, равно 12, 2-е число — 18, 3-е — 24 и т. д., т. е. такие числа образуют арифметическую прогрессию: $a_1 = 12$; $d = 6$; $a_n = 96$.

$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 96 = 12 + (n-1)\cdot 6 \Rightarrow n = \dfrac{96-12}{6} + 1 \Rightarrow n = 15$.

Ответ: 15.

8. В геометрической прогрессии $b_1 + b_3 = 40$; $b_2 + b_4 = 80$. Найти b_1 и q.

Решение.

$$\begin{cases} b_1 + b_1q^2 = 40, \\ b_1q + b_1q^3 = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1(1+q^2) = 40, \\ b_1q(1+q^2) = 80 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1(1+q^2) = 40, \\ q = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2, \\ b_1 = \dfrac{40}{1+4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2, \\ b_1 = 8. \end{cases}$$

Ответ: $b_1 = 8$; $q = 2$.

9. Между числами 1 и 256 вставить 3 числа так, чтобы все пять чисел составляли геометрическую прогрессию.

Решение. $b_1 = 1$; $b_5 = 256$. $b_5 = b_1q^4 \Rightarrow 256 = q^4 \Rightarrow q = 4$. $b_2 = 4$; $b_3 = 16$; $b_4 = 64$.

Ответ: 1; 4; 16; 64; 256.

10. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 32, а сумма ее первых пяти членов равна 31. Найти 1-й член прогрессии.

Решение. $S = 32$; $S_5 = 31$.

$$\begin{cases} \dfrac{b_1}{1-q} = 32, \\ \dfrac{b_1(1-q^5)}{1-q} = 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = (1-q)\cdot 32, \\ (1-q^5)\cdot 32 = 31 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 32 - 32q^5 = 31, \\ b_1 = 32(1-q) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^5 = \dfrac{1}{32}, \\ b_1 = 32(1-q) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \dfrac{1}{2}, \\ b_1 = 16. \end{cases}$$

Ответ: 16.

11. Сумма 3-x положительных чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равна 15. Если ко 2-му из них прибавить 1, к 3-му 5, а 1-е оставить без изменения, то получится геометрическая прогрессия. Найти исходные числа.

Решение. $a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 15 \Rightarrow a_1 + d = 5 \Rightarrow a_2 = 5$.

a_1; a_2+1; a_3+5 — геометрическая прогрессия со знаменателем q.

$$\begin{cases} a_1q = 6, \\ a_1+d = 5, \\ a_3+5 = (a_2+1)q \end{cases} \Leftrightarrow - \begin{cases} a_1q = 6, \\ a_1+d = 5, \\ 10+d = 6q \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow - \begin{cases} a_1q = 6, \\ a_1+d = 5, \\ a_1-10 = 5-6q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \dfrac{6}{a_1}, \\ a_1+d = 5, \\ a_1-10 = 5-\dfrac{36}{a_1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q = \dfrac{6}{a_1}, \\ a_1+d = 5, \\ a_1^2-15a_1+36 = 0. \end{cases}$$

$a_1 = 3$ и $a_1 = 12$ (не подходит, т.к. $a_2 = 5$, т.е. $d = -7$ и $a_3 < 0$, что невозможно).

$d = 5-3 = 2$; $a_2 = 5$; $a_3 = 7$.

Ответ: 3; 5; 7.

12. Найти первый член и разность арифметической прогрессии, если сумма ее первых 3-х членов равна 27, а сумма их квадратов равна 275.

Решение.

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3 = 27, \\ a_1^2+a_2^2+a_3^2 = 275 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1+a_1+d+a_1+2d = 27, \\ a_1^2+(a_1+d)^2+(a_1+2d)^2 = 275 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1+d = 9, \\ a_1^2+a_1^2+2a_1d+d^2+a_1^2+4a_1d+4d^2 = 275 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 9-d, \\ 3a_1^2+6a_1d+5d^2 = 275 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 9-d, \\ 3(9-d)^2+6d(9-d)+5d^2 = 275 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 9-d, \\ 243-54d+3d^2+54d-6d^2+5d^2 = 275 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 9-d, \\ 2d^2 = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = \pm 4, \\ a_1 = 5 \text{ и } a_1 = 13. \end{cases}$$

Ответ: $a_1 = 5$, $d = 4$ или $a_1 = 13$, $d = -4$.

13. Найти первый член и знаменатель геометрической прогрессии b_1, b_2, …, b_n, если известно, что $b_2-b_1 = -4$; $b_3-b_1 = 8$.

Решение.
$$\begin{cases} b_1q - b_1 = -4, \\ b_1q^2 - b_1 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow : \begin{cases} b_1(q-1) = -4, \\ b_1(q^2-1) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \dfrac{-4}{q-1}, \\ q+1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} q = -3, \\ b_1 = 1. \end{cases}$$
Ответ: $b_1 = 1$ и $q = -3$.

14. Найти 4 целых числа b_1, b_2, b_3, b_4, если известно, что числа b_2, b_3, b_4 образуют геометрическую прогрессию, а b_1, b_2, b_3 образуют арифметическую прогрессию и $b_1 + b_4 = 37$, $b_2 + b_3 = 36$.

Решение.
$$\begin{cases} b_3 = b_2q, \\ b_4 = b_2q^2, \\ b_2 = b_1 + d, \\ b_3 = b_1 + 2d, \\ b_1 + b_4 = 37, \\ b_2 + b_3 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 + 2d = (b_1+d)q, \\ b_1(b_1+d)q^2 = 37, \\ b_1 + d + b_1 + 2d = 36 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b_1 + 3d = 36, \\ b_1 + 2d = (b_1+d)q, \\ b_1 + (b_1+2d)q = 37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \dfrac{36-3d}{2}, \\ q = \dfrac{b_1+2d}{b_1+d}, \\ b_1 + (b_1+2d)\dfrac{b_1+2d}{b_1+d} = 37. \end{cases}$$
Преобразуем 3-е уравнение:
$$b_1^2 + b_1d + b_1^2 + 4b_1d + 4d^2 = 37b_1 + 37d \Rightarrow 2b_1^2 + 5b_1d + 4d^2 = 37b_1 + 37d.$$
$$2\left(\frac{36-3d}{2}\right)^2 + 5\frac{36-3d}{2}d + 4d^2 = 37\frac{36-3d}{2} + 37d \Rightarrow \frac{9}{2}(144 - 24d + d^2) + \frac{15}{2}(12d - d^2) + 4d^2 = 666 - \frac{111}{2}d + 37d \Rightarrow 648 - 108d + \frac{9}{2}d^2 + 90d - \frac{15}{2}d^2 + 4d^2 = 666 - \frac{37}{2}d \Rightarrow d^2 + \frac{d}{2} - 18 = 0 \Rightarrow 2d^2 + d - 36 = 0 \Rightarrow d_{1,\,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+288}}{4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow d_{1,\,2} = \frac{-1 \pm 17}{4} \Rightarrow d_1 = 4 \text{ и } d_2 = -\frac{9}{2}.$$

$b_1 = \dfrac{36-12}{2} = 12$ и $b_1 = \dfrac{36 + \frac{27}{2}}{2} = \dfrac{99}{4}$ — не подходит, т. к. b_1 — целое.

Итак: $b_1 = 12$; $b_2 = 16$; $b_3 = 20$;
$q = \dfrac{12+8}{12+4} = \dfrac{20}{16} = \dfrac{5}{4} \Rightarrow b_4 = 25$.
Ответ: 12; 16; 20; 25.

15. Известно, что при любом n сумма S_n членов некоторой арифметической прогрессии выражается формулой $S_n = 4n^2 - 3n$. Найти четыре первых члена этой прогрессии.

Решение.

$S_1 = a_1 = 1$; $S_2 = a_1 + a_2 = 16 - 6 = 10 \Rightarrow a_2 = 10 - 1 \Rightarrow a_2 = 9 \Rightarrow d = 8$. $a_3 = a_2 + d \Rightarrow a_3 = 17$; $a_4 = 25$.

Ответ: 1; 9; 17; 25.

16. Найти 1-й и 5-й члены геометрической прогрессии, если известно, что $b_4 - b_2 = -\dfrac{45}{32}$ и $b_6 - b_4 = -\dfrac{45}{212}$.

Решение.

$$\begin{cases} b_1q^3 - b_1q = -\dfrac{45}{32}, \\ b_1q^5 - b_1q^3 = -\dfrac{45}{212} \end{cases} \Leftrightarrow : \begin{cases} b_1q(q^2-1) = -\dfrac{45}{32}, \\ b_1q^3(q^2-1) = -\dfrac{45}{212} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q^2 = \dfrac{1}{16}, \\ b_1 = \dfrac{-\dfrac{45}{32}}{q^3 - q} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \pm\dfrac{1}{4}, \\ b_1 = \pm 6. \end{cases}$$

1) $b_1 = 6$; $q = \dfrac{1}{4} \Rightarrow b_5 = b_1q^4 \Rightarrow b_5 = 6 \cdot \dfrac{1}{256} \Rightarrow b_5 = \dfrac{3}{128}$.

2) $b_1 = -6$; $q = -\dfrac{1}{4}$; $b_5 = (-6) \cdot \dfrac{1}{256} \Rightarrow b_5 = -\dfrac{3}{128}$.

Ответ: 6; $\dfrac{3}{128}$ и -6; $-\dfrac{3}{128}$.

17. Найти 3 числа, образующие геометрическую прогрессию, если известно, что их произведение равно 64, а их среднее арифметическое равно $\dfrac{14}{3}$.

Решение. Дано: b_1, b_2, b_3; $b_2 = b_1q$ и $b_3 = b_1q^2$.

$$\begin{cases} b_1b_2b_3 = 64, \\ \dfrac{b_1+b_2+b_3}{3} = \dfrac{14}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1b_1qb_1q^2 = 64, \\ b_1 + b_1q + b_1q^2 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1^3q^3 = 64, \\ b_1(1+q+q^2) = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1q = 4, \\ b_1(1+q+q^2) = 14 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q = \dfrac{4}{b_1}, \\ b_1\left(1 + \dfrac{4}{b_1} + \dfrac{4}{b_1^2}\right) = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \dfrac{4}{b_1}, \\ b_1^2 - 10b_1 + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 2 \text{ и } b_1 = 8, \\ q_1 = 2 \text{ и } q_2 = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Ответ: 2; 4; 8 и 8; 4; 2.

18. Найти четыре первых члена арифметической прогрессии, у которой сумма любого числа членов равна утроенному квадрату этого числа.

Решение. $S_n = 3n^2$. $S_1 = a_1 = 3$; $S_2 = a_1 + a_2 = 12 \Rightarrow \Rightarrow a_2 = 9 \Rightarrow d = 6$. $a_3 = 15$; $a_4 = 21$.

Ответ: 3; 9; 15; 21.

19. Три числа, из которых третье равно 12, образуют геометрическую прогрессию. Если вместо 12 взять 9, то три числа составят арифметическую прогрессию. Найти эти числа.

Решение. b_1, b_2, 12 — геометрическая прогрессия; b_1, b_2, 9 — арифметическая прогрессия.

$$\begin{cases} b_2 = b_1 q, \\ 12 = b_1 q^2, \\ b_2 = b_1 + d, \\ 9 = b_1 + 2d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 q^2 = 12, \\ b_1 + 2d = 9, \\ b_1 q = b_1 + d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^2 = \dfrac{12}{b_1}, \\ d = \dfrac{9 - b_1}{2}, \\ b_1 q = \dfrac{b_1 + 9}{2}. \end{cases}$$

$b_1 > 0$, т. к. $b_1 q^2 = 12 \Rightarrow q > 0$, т. к. $b_1 q = \dfrac{b_1 + 9}{2} > 0 \Rightarrow \Rightarrow q = \sqrt{\dfrac{12}{b_1}}$. $b_1\sqrt{\dfrac{12}{b_1}} = \dfrac{b_1 + 9}{2} \Rightarrow 2\sqrt{12b_1} = b_1 + 9 \Rightarrow 48b_1 = = b_1^2 + 18b_1 + 81 \Rightarrow b_1^2 - 30b_1 + 81 = 0 \Rightarrow b_1 = 3$ и $b_1 = 27$; $q = 2$ и $q = \dfrac{2}{3}$.

Ответ: 3; 6; 12 и 27; 18; 12.

20. Решить уравнение

$$\frac{x-1}{x} + \frac{x-2}{x} + \frac{x-3}{x} + \ldots + \frac{1}{x} = 3; \quad x \neq 0.$$

Решение. $(x-1) + (x-2) + (x-3) + \ldots + 1 = 3x \Rightarrow \Rightarrow 1 + 2 + 3 + \ldots + (x-3) + (x-2) + (x-1) = 3x$.

Слева арифметическая прогрессия:

$a_1 = 1$; $a_n = x - 1$; $n = x - 1$.

$$S_n = \frac{1+x-1}{2}(x-1) = \frac{x(x-1)}{2}. \ \frac{x(x-1)}{2} = 3x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 - x - 6x = 0 \Rightarrow x(x-7) = 0 \Rightarrow x = 7 \text{ (т. к. } x \neq 0).$$

Ответ: 7.

21. Сумма 3-х чисел равна $\frac{11}{18}$, а сумма обратных им чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равна 18. Найти эти числа.

Решение. $a_1 + a_2 + a_3 = \frac{11}{18}$; $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = 18$; $\frac{1}{a_2} = \frac{1}{a_1} + d$; $\frac{1}{a_3} = \frac{1}{a_1} + 2d$.

Получаем

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1} + d + \frac{1}{a_1} + 2d = 18 \Rightarrow \frac{3}{a_1} + 3d = 18 \Rightarrow \frac{1}{a_1} + d = 6 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{a_1} = 6 - d \Rightarrow a_1 = \frac{1}{6-d}. \ \frac{1}{a_2} = 6 - d + d \Rightarrow a_2 = \frac{1}{6}.$$

$$\frac{14}{a_3} = 6 - d + 2d \Rightarrow a_3 = \frac{1}{6+d}.$$

Итак, $\frac{1}{6-d} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6+d} = \frac{11}{18}$.

$$\frac{36 + \cancel{6d} + 36 - d^2 + 36 - \cancel{6d}}{\cancel{6}(36-d^2)} = \frac{11}{\underset{3}{\cancel{18}}} \Rightarrow 3(108 - d^2) =$$
$$= 11(36 - d^2) \Rightarrow 324 - 3d^2 = 396 - 11d^2 \Rightarrow 8d^2 = 72 \Rightarrow d^2 = 9 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow d = \pm 3.$$

При $d = 3$ $a_1 = \frac{1}{3}$; $a_2 = \frac{1}{6}$; $a_3 = \frac{1}{9}$.

При $d = -3$ $a_1 = \frac{1}{9}$; $a_2 = \frac{1}{6}$; $a_3 = \frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{3}$.

22. Найти сумму семи первых членов бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $|q| < 1$, если ее 2-й член равен 4, а отношение суммы квадратов членов к сумме членов равно $\frac{16}{3}$.

Решение. $b_1, b_2, \ldots, b_7, \ldots$ — бесконечная геометрическая прогрессия.

$b_2 = 4 \Rightarrow b_1 q = 4$.

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots = S = \frac{b_1}{1-q}.$$

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots = b_1^2 + b_1^2 q^2 + b_1^2 q^4 + \ldots =$$
$$= b_1^2(1 + q^2 + q^4 + \ldots) = b_1^2 \frac{1}{1-q^2}.$$

$$\frac{b_1^{\cancel{2}}\cancel{(1-q)}}{\underbrace{\cancel{(1-q^2)}}_{1+q}\cancel{b_1}} = \frac{b_1}{1+q} \Rightarrow \frac{b_1}{1+q} = \frac{16}{3}.$$

Итак,

$$\begin{cases} b_1 q = 4, \\ \dfrac{b_1}{1+q} = \dfrac{16}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \dfrac{4}{q}, \\ \dfrac{4}{q(1+q)} = \dfrac{16}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \dfrac{4}{q}, \\ (q^2+q)\cdot 4 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \dfrac{4}{q}, \\ 4q^2 + 4q - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \dfrac{4}{q}, \\ q_{1,\,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \dfrac{1}{2}, \\ b_1 = 8. \end{cases}$$

$$S_7 = \frac{b_1(1-q^7)}{1-q} \Rightarrow S_7 = \frac{8\left(1 - \frac{1}{128}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{127}{8}.$$

О т в е т: $\dfrac{127}{8}$.

23. Даны арифметическая и геометрическая прогрессии. В арифметической прогрессии $a_1 = 3$ и $d = 6$. В геометрической прогрессии $b_1 = 3$ и $q = \sqrt{2}$. Выяснить, что больше: сумма первых шести членов арифметической прогрессий или сумма первых восьми членов геометрической прогрессии?

Р е ш е н и е.

$$S_6 = \frac{2a_1 + 5d}{2} \cdot 6 \Rightarrow S_6 = \frac{2\cdot 3 + 5\cdot 6}{2} \cdot 6 = 51.$$

$$S_8 = \frac{b_1(1-q^8)}{1-q} \Rightarrow S_8 = \frac{3(1-16)}{1-\sqrt{2}} = \frac{45}{\sqrt{2}-1}$$

$$\frac{45}{\sqrt{2}-1} > 51? \Rightarrow \frac{15}{\sqrt{2}-1} > 17? \Rightarrow 15 > 17\sqrt{2} - 17? \Rightarrow 32 >$$
$$> 17\sqrt{2}\,? \Rightarrow 1024 > 578, \text{ верно.}$$

О т в е т: $S_8 > S_6$.

24. Магазин радиотоваров продал в 1-й рабочий день месяца 105 телевизоров. Каждый следующий рабочий день дневная продажа возрастала на 10 телевизоров, и месячный план — 4000 телевизоров — был выполнен досрочно, причем в целое число рабочих дней. После этого ежедневно продавалось на 13 телевизоров меньше, чем в день выполнения месячного плана. На сколько процентов был перевыполнен месячный план продажи телевизоров, если в месяце 26 рабочих дней?

Р е ш е н и е. До выполнения плана продажа телевизоров происходила по закону арифметической прогрессии:

$a_1 = 105$; $d = 10$; $S_n = 4000$.

$S_n = \dfrac{2a_1 + (n-1)d}{2} n \Rightarrow 4000 = \dfrac{2 \cdot 105 + (n-1) \cdot 10}{2} n \Rightarrow 8000 =$
$= 210n + 10n^2 - 10n \Rightarrow 10n^2 + 200n - 8000 = 0 \Rightarrow n = 20$ дн.

$a_n = a_1 + (n-1)d = 105 + 10 \cdot 19 = 295$ тел.

Осталось 6 дней месяца и каждый день продавалось $295 - 13 = 282$ тел., $282 \cdot 6 = 1692$ тел.

План был перевыполнен на $\dfrac{1692}{4000} \cdot 100\% = 42{,}3\%$.

О т в е т: 42,3%.

Функции

Функция $y = f(x)$ считается заданной, если каждому $x \in D$ соответствует единственное по определенному правилу вычисленное $y \in E$, где D и E — числовые множества. Говорят, что y зависит от x, и функция — это зависимость переменной y от переменной x. Множество D называется *областью определения* функции, множество E — *областью значений* функции. Переменную x называют **независимой** переменной, а переменную y — **зависимой**. Переменная y является функцией от x, что записывается $y = f(x)$. Для записи функций используются и другие буквы: $y = \varphi(x)$; $y = P(x)$ и т. п.

Переменная x называется **аргументом** функции, y — ее **значением**.

Функция может быть задана формулой, таблицей и другими способами. Если функция задана формулой, и область определения функции не указана, то считается, что область определения состоит из всех значений независимой переменной, при которых эта формула имеет смысл.

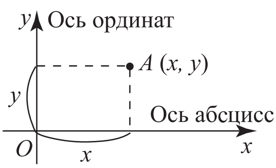
Например, если $f(x) = \dfrac{1}{x}$, то область определения функции все $x \in R$, кроме $x = 0$, т. е. $x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

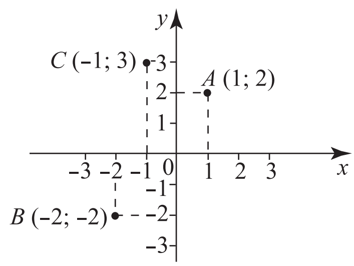
Если $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$ — многочлен, то $f(x) = P(x)$ называется целой рациональной функцией; если $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ — это дробно-рациональная функция. Например, $f(x) = x^3 + x - 1$ — целая рациональная функция 3-й степени; $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2}$ — дробно-рациональная функция.

Введем понятие *координатной плоскости*. Проведем на плоскости через точку O две взаимно перпендикулярных прямые x и y — оси координат. Ось Ox называется осью абсцисс, ось Oy — осью ординат, точка O — началом координат. Этой точкой каждая из осей разбивается на две полуоси, одна из которых — положительная, другая — отрицательная.

Каждой точке плоскости ставится в соответствие пара чисел x; y — *координаты точки*. Это записывается $A(x; y)$. x — абсцисса точки, y — ордината. Значение x определяется как расстояние от начала координат до основания перпендикуляра, опущенного из точки A на ось Ox; значение y — расстояние от начала координат до основания перпендикуляра, опущенного из точки A на Oy.

Для определения значений x и y на осях выбираются единичные отрезки.



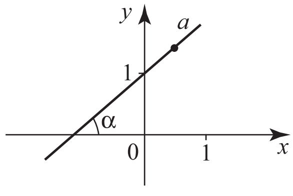


Оси координат разбивают плоскость на 4 четверти: I, II, III и IV. В I четверти обе координаты положительны, во II — координата x отрицательна, y положительна, в III — обе координаты отрицательны, в IV — x положительна, y отрицательна. Приведенное описание — это *прямоугольная декартова система координат*. *Графиком функции* называется множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции. График представляет собой линию на плоскости, непрерывную или разрывную.

ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

Функция вида $y = kx + b$, где k и b — числа, называется линейной функцией, ее область определения $D(kx + b) = R$, т. е. $x \in R$. Область значений линейной функции $E(kx + b) = R$, т. е. $y \in R$, если $k \neq 0$; если $k = 0$, то $y = b$.

График линейной функции — прямая линия, угол наклона которой к оси Ox определяется числом k (угловой коэффициент). Если α — угол наклона, то $\operatorname{tg}\alpha = k$; если $k = 0$, то прямая параллельна Ox.



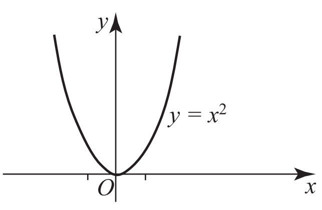
Например, график функции $f(x) = x + 1$ — прямая a.

$k = 1 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45°$.

График линейной функции строится по двум точкам, т. к. две точки определяют прямую единственным образом.

КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

Функция $y = f(x)$, где $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, называется квадратичной. Область определения квадратичной функции $x \in R$, или $D(ax^2 + bx + c) = R$. График квадратичной функции называется параболой, ее ветви направлены вверх, если $a > 0$, и вниз, если $a < 0$. И в том, и в другом случае парабола имеет вершину, координаты которой вычисляются по следующим формулам: $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$; $y_0 = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$. Обычно при необходимости по формуле вычисляют x_0, а y_0 получают подстановкой x_0 в формулу $f(x)$, т. е. $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$. Парабола имеет вертикальную ось симметрии, проходящую через вершину. Построение параболы часто сводится к нахождению точек пересечения графика с Ox, т. е. корней уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, если они существуют, и координат вершины. Если корней нет, то находят еще несколько точек.



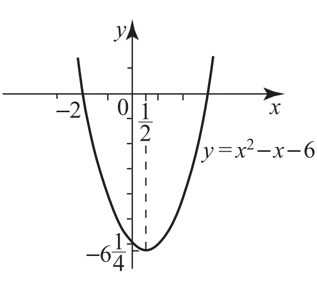
Например, график функции $y = x^2$ имеет вершину в т. (0; 0), т. к. $b = c = 0$ и проходит через точки (1;1) и (−1; 1).

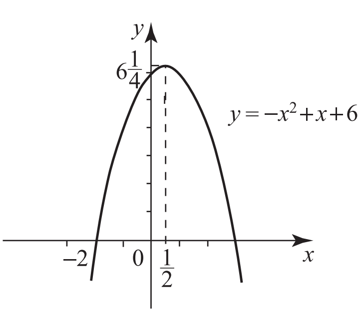
Построим графики функций $y = x^2 - x - 6$ и $y = -x^2 + x + 6$.

1) $x_0 = -\dfrac{-1}{2} = \dfrac{1}{2}$; $y_0 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} - 6 = -6\dfrac{1}{4}$.

$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 3$ и $x_2 = -2$.

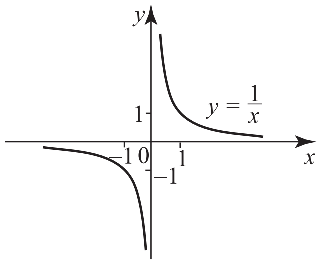
2) $x_0 = -\dfrac{1}{-2} = \dfrac{1}{2}$; $y_0 = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} + 6 = 6\dfrac{1}{4}$. Корни уравнения те же.





Из графиков видно, что множество значений квадратичной функции $y \in [y_0; \infty)$, если $a > 0$, и $y \in (-\infty; y_0]$, если $a < 0$.

ФУНКЦИЯ $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$.



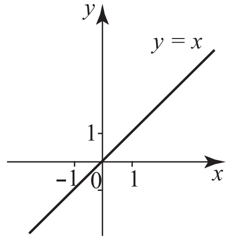
Эта функция называется *обратной пропорциональностью*. Область ее определения $x \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ \infty)$, т. к. $x \neq 0$.

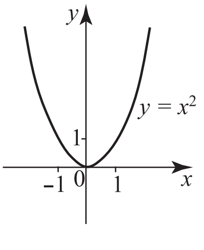
Множество значений $y \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ \infty)$. График этой функции называется гиперболой; он не имеет точек пересечения с осями Ox и Oy и имеет эти оси в качестве асимптот, т. е. прямых, к которым кривая бесконечно приближается. График расположен в I и III четвертях, если $k > 0$, и во II и IV четвертях, если $k < 0$.

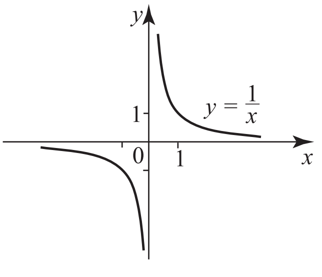
Например, построим график $y = \frac{1}{x}$. Он проходит через точки $(1;\ 1)$; $(-1;\ -1)$. График симметричен относительно начала координат.

СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

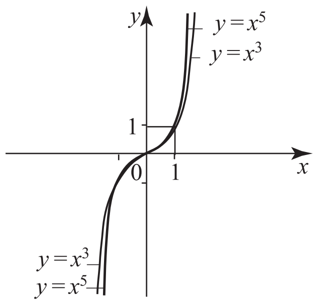
Степенной функцией с целым показателем называется функция вида $y = x^n$, где n — целое число. Отметим, что частными случаями такой степенной функции являются линейная функция $y = x$ $(n = 1)$, квадратичная функция $y = x^2$ $(n = 2)$, обратная пропорциональность $y = \frac{1}{x}$ $(n = -1)$. Графики этих функций представлены ниже.

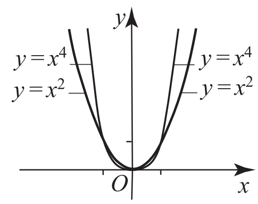




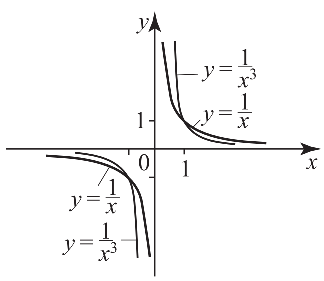


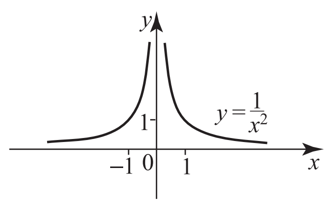
1) Показатель степени n — нечетное положительное число $(n = 2k + 1,\ k \in N)$; $x \in R$, $y = x^{2k+1}$, например, $y = x^3$; $y = x^5$.
График $y = x^3$ называется кубической параболой.
2) n — четное положительное число $(n = 2k,\ k \in N)$, $x \in R$.
$y = x^{2k}$, например, $y = x^2$; $y = x^4$.





3) n — нечетное отрицательное число ($n = -(2k-1)$, $k \in N$).
$y = \dfrac{1}{x^{2k-1}}$, например, $y = \dfrac{1}{x}$; $u = \dfrac{1}{x^3}$; $x \in R$, $x \neq 0$.
4) n — четное отрицательное число ($n = -2k$, $k \in N$).
$y = \dfrac{1}{x^{2k}}$, например, $y = \dfrac{1}{x^2}$. $x \in R$, $x \neq 0$.



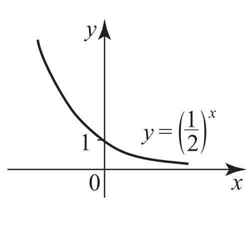


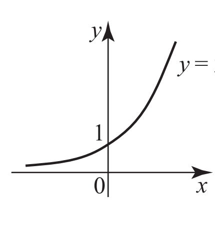
ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

Функция $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in R$, называется показательной. При этом $y > 0$. Функция имеет различные графики при $a > 1$ и $0 < a < 1$.

1) $a > 1$; если x возрастает, то a^x также возрастает, например, $y = 2^x$.

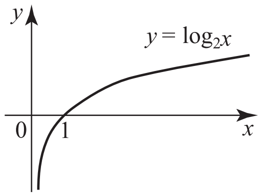
2) $0 < a < 1$; если x возрастает, то a^x убывает, например, $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.

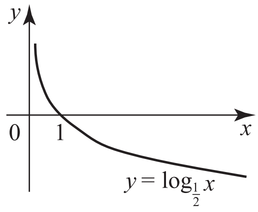




ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Функция $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$ и $x > 0$, называется логарифмической. Так же, как и в случае показательной функции, существуют 2 графика логарифмической функции: при $a > 1$ и при $0 < a < 1$. Например, $y = \log_2 x$ и $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.



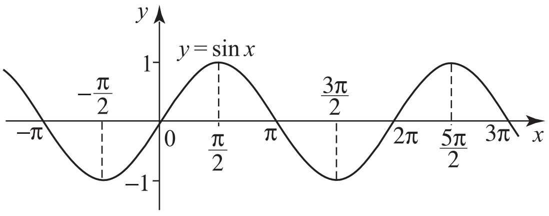


ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Тригонометрическими функциями называются функции $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$.

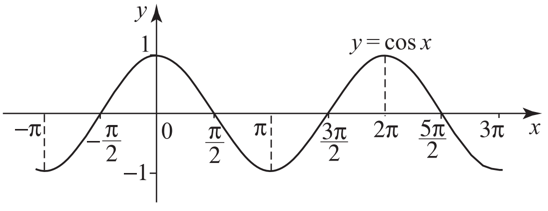
1) $y = \sin x$; $x \in R$; $y \in [-1; 1]$.

График — синусоида, период $T = 2\pi$.



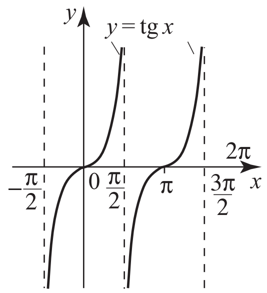
2) $y = \cos x$; $x \in R$; $y \in [-1; 1]$.

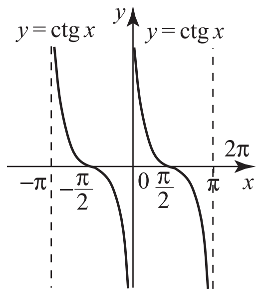
График — синусоида, период $T = 2\pi$.

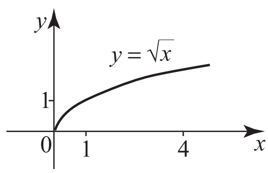


3) $y = \operatorname{tg} x$; $\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$, $y \in (-\infty; \infty)$, период $T = \pi$.

4) $y = \operatorname{ctg} x$; $\sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq \pi k$, $k \in Z$, $y \in (-\infty; \infty)$, период $T = \pi$.







Функции: $y = kx + b$; $y = x^2$; $y = x^3$; $y = \dfrac{1}{x}$; $y = a^x$; $y = \log_a x$; $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \operatorname{tg} x$; $y = \operatorname{ctg} x$ относятся к элементарным. К ним присоединяют еще функцию $y = \sqrt{x}$.

График функции $y = \sqrt{x}$.
$x \in [0;\,\infty)$; $y \in [0;\,\infty)$.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Одним из способов построения графиков является способ получения из графика функции $y = f(x)$ графиков функций следующего вида:

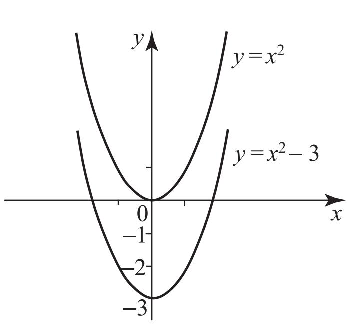
1) $y = f(x) + a$;
2) $y = f(x + a)$;
3) $y = kf(x)$, $k > 0$;
4) $y = f(kx)$, $k > 0$;
5) $y = -f(x)$;
6) $y = f(-x)$;
7) $y = |f(x)|$;
8) $y = f(|x|)$;
9) $x = f(y)$.

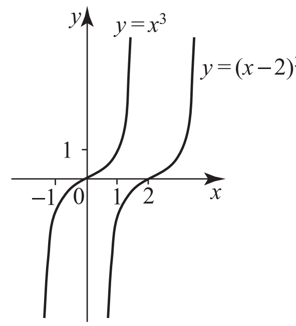
Построение нового графика происходит на основе графика элементарной функции путем его преобразования.

В 1-м случае график $y = f(x) + a$ получается из графика $y = f(x)$ путем сдвига этого графика как единого целого вдоль оси ординат на a единиц. Например, построим график функции $y = x^2 - 3$. Сначала построим график $y = x^2$ и затем сдвинем его на 3 единицы вниз.

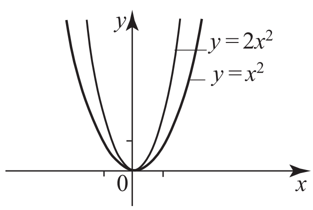
Во 2-м случае график $y = f(x + a)$ получается из графика $y = f(x)$ путем сдвига вдоль оси абсцисс на a единиц влево, если $a > 0$, и вправо, если $a < 0$. Например, построим график $y = (x - 2)^3$.

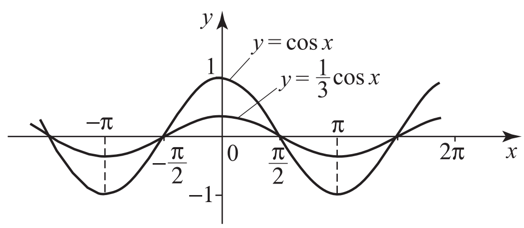
В 3-м случае для построения графика $y = kf(x)$, $k > 0$, надо растянуть график $y = f(x)$ в k раз вдоль оси ординат при неиз-



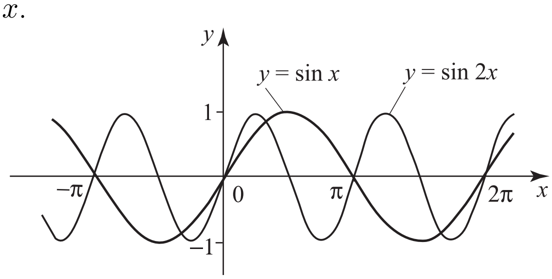


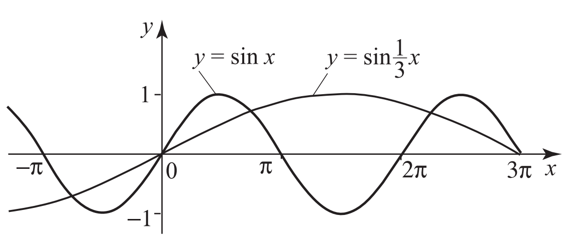
менной оси абсцисс. Если $k < 1$, то растяжение часто называют сжатием. Например, построим графики: $y = 2x^2$ и $y = \dfrac{1}{3}\cos x$.





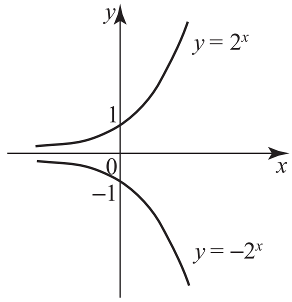
В 4-м случае для построения графика $y = f(kx)$, $k > 0$, надо растянуть или сжать вдоль оси абсцисс при неизменной оси ординат график $y = f(x)$. Если $k < 1$, происходит растяжение, если $k > 1$ — сжатие. Например, построим графики $y = \sin 2x$ и $y = \sin\dfrac{1}{3}\,x$.

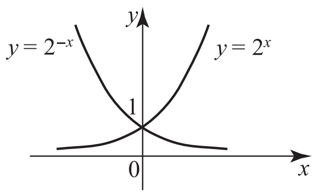




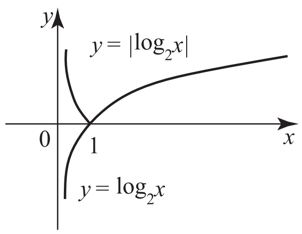
В 5-м случае для получения графика $y = -f(x)$ из графика $y = f(x)$ нужно отразить его симметрично относительно оси абсцисс. Например, построим график функции $y = -2^x$.

В 6-м случае для получения графика $y = f(-x)$ из графика $y = f(x)$ нужно отразить его симметрично относительно оси ординат. Например, построим график функции $y = 2^{-x}$.

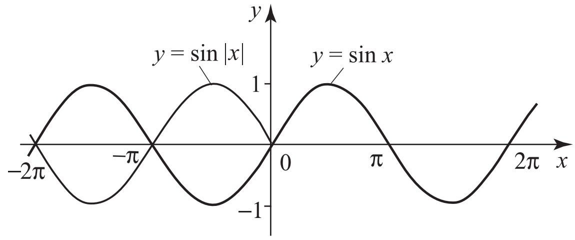




В 7-м случае для получения графика $y = |f(x)|$ из графика $y = f(x)$ нужно отразить симметрично относительно оси абсцисс часть графика, лежащую ниже этой оси. Например, построим график $y = |\log_2 x|$.



В 8-м случае для получения графика $y = f(|x|)$ из графика $y = f(x)$ нужно заменить часть графика, лежащую слева от оси ординат, графиком, симметричным части графика, лежащей справа от оси ординат. Например, построим график $y = \sin|x|$.



9-й случай — это получение обратной функции. Такими взаимно обратными функциями являются $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$, $x \geqslant 0$;

$y = a^x$ и $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$;

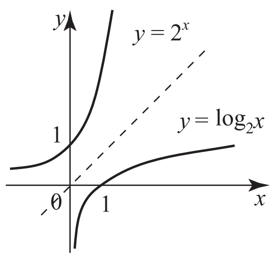
$y = \sin x$ и $y = \arcsin x$, $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant \dfrac{\pi}{2}$;

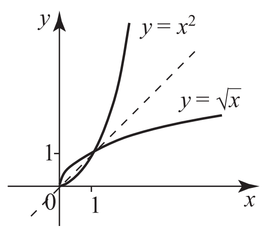
$y = \cos x$ и $y = \arccos x$, $|x| \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$;

$y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{arctg} x$, $|y| < \dfrac{\pi}{2}$;

$y = \operatorname{ctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$, $0 < y < \pi$.

Для построения обратной функции нужно функцию $y = f(x)$ симметрично отразить относительно биссектрисы прямого угла I четверти координатной плоскости. Например, графики $y = 2^x$ и $y = \log_2 x$; $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.





СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

1) *Четность.* Функция $f(x)$ называется четной, если на всей области определения $f(-x) = f(x)$; $f(x)$ называется нечетной, если на всей области определения $f(-x) = -f(x)$. Например,

$y = x^2$; $y = \cos x$; $y = |x|$ — четные функции.

$y = x$; $y = x^3$; $y = \sin x$ — нечетные функции.

График четной функции симметричен относительно оси ординат; график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

2) *Периодичность.* Функция $f(x)$ называется периодической, если на всей области определения $f(x) = f(x \pm T)$, где $T \neq 0$ — период.

Например, функции $y = \sin x$, $y = \cos x$ — периодические с периодом $T = 2\pi$; функции $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ — периодические с периодом $T = \pi$. Период функции $y = \sin kx$ равен $\dfrac{2\pi}{|k|}$, аналогично для $y = \cos kx$, $y = \operatorname{tg} kx$, $y = \operatorname{ctg} kx$.

3) *Возрастание.* Функция $f(x)$ возрастает на некотором интервале из области определения, если для любых x_1 и x_2 из этого интервала таких, что $x_2 > x_1$, выполняется $f(x_2) > f(x_1)$.

4) *Убывание.* Функция $f(x)$ убывает на некотором интервале из области определения, если для любых x_1 и x_2 из этого интервала таких, что $x_2 > x_1$, выполняется $f(x_2) < f(x_1)$.

Функция	Область определения	Область значений	Период
$y = kx + b$	$(-\infty; \infty)$	$(-\infty; \infty)$	—
$y = x^2$	$(-\infty; \infty)$	$[0; \infty)$	—
$y = x^3$	$(-\infty; \infty)$	$(-\infty; \infty)$	—
$y = \dfrac{1}{x}$	$(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$	—
$y = \sqrt{x}$	$[0; \infty)$	$[0; \infty)$	—
$y = a^x$	$(-\infty; \infty)$	$(0; \infty)$	—
$y = \log_a x$	$(0; \infty)$	$(-\infty; \infty)$	—
$y = \sin x$	$(-\infty; \infty)$	$[-1; 1]$	2π
$y = \cos x$	$(-\infty; \infty)$	$[-1; 1]$	2π
$y = \operatorname{tg} x$	$x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$	$(-\infty; \infty)$	π
$y = \operatorname{ctg} x$	$x \neq \pi k,\ k \in Z$	$(-\infty; \infty)$	π

5) *Экстремумы.* Точка x_0 называется точкой минимума функции $f(x)$, если для всех x из некоторой окрестности x_0 выполняется $f(x) \geqslant f(x_0)$. Само значение $f(x_0)$ — минимум функции (min). Точка x_0 называется точкой максимума функции $f(x)$, если для всех x из некоторой окрестности x_0 выполняется $f(x) \leqslant f(x_0)$. Само значение $f(x_0)$ в этом случае называется максимумом функции (max). Выше приведена таблица свойств элементарных функций.

Четность	Возрастание, убывание	Экстремумы
нечетная при $b = 0$	при $a < 0$ убывает при $a > 0$ возрастает	—
четная	убывает на $(-\infty; 0)$ возрастает на $[0; \infty)$	min при $x = 0$
нечетная	возрастает	—
нечетная	убывает на $(-\infty; 0)$ и $(0; \infty)$	—
—	возрастает	—
—	при $0 < a < 1$ убывает при $a > 1$ возрастает	—
—	при $0 < a < 1$ убывает при $a > 1$ возрастает	—
нечетная	возрастает на $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$; убывает на $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$	max при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, min при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$
четная	убывает на $(2\pi k, \pi + 2\pi k)$; возрастает на $(\pi + 2\pi k, 2\pi + 2\pi k)$, $k \in Z$	max при $x = \pi k$, min при $x = \pi + \pi k$, $k \in Z$.
нечетная	возрастает	—
нечетная	убывает	—

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

Допустим, областью определения функции $y = f(x)$ является интервал $(a; b)$. Возьмем точку $x_0 \in (a; b)$ и точку $x \in (a, b)$ в окрестности точки x_0; тогда разность $\Delta x = x - x_0$ называется *приращением аргумента* в точке x_0.

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ — *приращение функции* в точке x_0.

Число b называется *пределом функции* $f(x)$ в точке a, если для любого $\varepsilon > 0$ при всех $x \neq a$, достаточно близких к a, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Обозначается $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

$y'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ — **производная функции** $y = f(x)$ равна пределу отношения приращения функции к приращению аргумента, если такой предел существует и конечен. Производная функции $f(x)$ также обозначается $f'(x)$.

ПРОИЗВОДНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

1. $y = C$ (const); $\quad y' = 0$;
2. $y = x^n$; $\quad y' = nx^{n-1}$; $n \in R$;
3. $y = a^x$; $\quad y' = a^x \ln a$;
4. $y = \log_a x$; $\quad y' = \dfrac{1}{x \ln a}$;
5. $y = \sin x$; $\quad y' = \cos x$;
6. $y = \cos x$; $\quad y' = -\sin x$;
7. $y = \operatorname{tg} x$; $\quad y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
8. $y = \operatorname{ctg} x$; $\quad y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

ПРАВИЛА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ

Если для функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ существуют производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$, то:

1. $(f(x) + \varphi(x))' = f'(x) + \varphi'(x)$;
2. $(f(x) - \varphi(x))' = f'(x) - \varphi'(x)$;
3. $(f(x)\varphi(x))' = f'(x)\varphi(x) + f(x)\varphi'(x)$;
4. $\left(\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\varphi(x) - f(x)\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}$, $\varphi(x) \neq 0$;
5. $(Cf(x))' = Cf'(x)$, где C — const.
6. $f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$ — формула производной сложной функции.

Если функция имеет производную на некотором интервале, то она называется *дифференцируемой* на этом интервале.

Если в каждой точке интервала $f'(x) > 0$, то $f(x)$ возрастает на этом интервале.

Если в каждой точке интервала $f'(x) < 0$, то на этом интервале $f(x)$ убывает.

Если на интервале $(a;\, b)$ $f(x)$ имеет производную $f'(x)$ и $x_0 \in (a;\, b)$ и если $f'(x) > 0$ при $x \in (a;\, x_0)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in (x_0;\, b)$, то точка x_0 является *точкой максимума* функции $f(x)$; при этом $f'(x_0) = 0$.

И наоборот, если при тех же условиях $f'(x) < 0$ при $x \in (a;\, x_0)$ и $f'(x) > 0$ при $x \in (x_0;\, b)$, то точка x_0 — *точка минимума функции* $f(x)$, при этом $f'(x_0) = 0$.

УРАВНЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ К ГРАФИКУ ФУНКЦИИ

Касательная к графику $f(x)$ в точке x_0, если $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, — это прямая, проходящая через точку $(x_0,\, f(x_0))$ и имеющая угловой коэффициент $f'(x_0)$. Уравнение касательной: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Например, напишем уравнение касательной к функции $y = x^3$ в точке $x_0 = 2$.

$f(x_0) = 8$; $f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(x_0) = 12$.

Уравнение касательной: $y = 8 + 12(x - 2) \Rightarrow y = 8 + 12x - 24 \Rightarrow y = 12x - 16$.

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

Исследование функции, т. е. наиболее полное описание ее свойств, производится, как правило, для построения ее графика и состоит из нескольких пунктов:

1. область определения функции;
2. область значений функции;
3. четность, нечетность функции;
4. периодичность функции;
5. определение нулей функции, т. е. значений x, в которых функция обращается нуль, и значения y, которое принимает функция при $x = 0$;
6. интервалы возрастания и убывания функции;
7. экстремумы функции;
8. нахождение, если это необходимо, дополнительных точек для построения графика.

Иногда к перечисленным пунктам добавляют еще нахождение интервалов знакопостоянства функции.

Однако для построения графика не всегда бывает необходимо проводить исследование по полной схеме, достаточно тех пунктов, которые дают возможность построить график. Так, бывает трудно найти область значений функции и нули функции.

Пример. Исследовать функцию и построить ее график.

$f(x) = 4x^2 - x^4$.

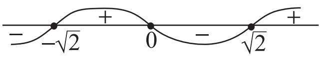
1. Область определения $x \in R$;

3. $f(-x) = 4(-x)^2 - (-x)^4 = 4x^2 - x^4 = f(x)$ — функция четная;

5. $f(0) = 0$; $4x^2 - x^4 = 0 \Rightarrow x^2(4 - x^2) = 0 \Rightarrow x = 0$ и $x = \pm 2$;

6. $f'(x) = 8x - 4x^3$; $f'(x) > 0 \Rightarrow 8x - 4x^3 > 0 \Rightarrow 4x(2 - x^2) > 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 2) < 0 \Rightarrow 4x(x - \sqrt{2}\,)(x + \sqrt{2}\,) < 0$.

Метод интервалов:

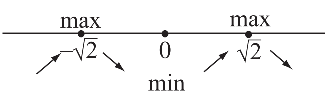


Функция возрастает на интервалах: $(-\infty;\ -\sqrt{2}\,)$ и $(0;\sqrt{2}\,)$.

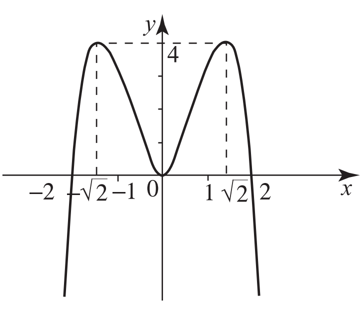
$f'(x) < 0$ при $x \in (-\sqrt{2}\,; 0) \cup (\sqrt{2}\,; \infty) \Rightarrow$ на этих интервалах функция убывает.

7. $f'(x) = 0 \Rightarrow 8x - 4x^3 = 0 \Rightarrow 4x(2 - x^2) = 0 \Rightarrow x = 0$ и $x = \pm\sqrt{2}$ — эти значения x называют *критическими точками*.

Только там, где $f'(x) = 0$, возможны экстремумы функции. Экстремумы легко определить по схеме.



Стрелка, направленная вверх, означает возрастание функции, вниз — убывание.



Если в критической точке возрастание функции сменяется убыванием, то в этой точке — максимум, если наоборот — минимум.

8. Составим небольшую таблицу:

x	± 1	$\pm\sqrt{2}$	± 3
y	3	4	-45

Строим график.

Область значений функции, которую сразу определять было сложно, $y \in (-\infty; 4]$.

НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ

Решение многих практических задач часто сводится к нахождению наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке функции. Правило нахождения этих значений таково: чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции, имеющей на отрезке конечное число критических точек, нужно вычислить значения функции во всех критических точках и на концах отрезка, а затем из полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее.

Например, найдем наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x}$ на отрезке [1; 3].

$f'(x) = \dfrac{2xx - x^2 - 4}{x^2} = \dfrac{x^2-4}{x^2}$;

$f'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{x^2-4}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 2$ критические точки.

Составим таблицу:

x	-2	1	2	3
$f(x)$	-4	5	4	$\frac{13}{3}$

Итак, наименьшее значение $f(x)$ -4, а наибольшее 5, часто это записывают так: $\min\limits_{[1;\,3]} f(x) = -4$; $\max\limits_{[1;\,3]} f(x) = 5$.

ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех x из этого промежутка

$$F'(x) = f(x).$$

Например, функция $F(x) = \dfrac{x^5}{5}$ — первообразная для функции $f(x) = x^4$ при $x \in (-\infty; \infty)$, так как

$$F'(x) = \left(\frac{x^5}{5}\right)' = \frac{5x^4}{5} = x^4 = f(x).$$

Любая первообразная для $f(x)$ при $x \in (a; b)$ может быть записана как $F(x) + c$, где $F(x)$ — одна из первообразных для $f(x)$ при $x \in (a; b)$, а c — произвольное число.

$$(F(x) + c)' = F'(x) + c' = F'(x) = f(x).$$

Нахождение первообразной для функции — действие, обратное нахождению производной. Исходя из этого, можно составить таблицу первообразных некоторых функций.

Функция $f(x)$	$a = \text{const}$	$x^p,\ p \neq -1$	a^x
Общий вид первообразных	$ax + c$	$\frac{x^{p+1}}{p+1} + c$	$\frac{a^x}{\ln a} + c$
Функция $f(x)$	e^x	$\frac{1}{x}$	$\sin x$
Общий вид первообразных	$e^x + c$	$\ln\lvert x\rvert + c$	$-\cos x + c$
Функция $f(x)$	$\cos x$	$\frac{1}{\cos^2 x},\ \cos x \neq 0$	$\frac{1}{\sin^2 x},\ \sin x \neq 0$
Общий вид первообразных	$\sin x + c$	$\operatorname{tg} x + c$	$-\operatorname{ctg} x + c$

ТРИ ПРАВИЛА НАХОЖДЕНИЯ ПЕРВООБРАЗНЫХ

1. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, а $G(x)$ — первообразная для $g(x)$, то $F(x) + G(x)$ — первообразная для $f(x) + g(x)$.

2. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ и k — число, то $kF(x)$ — первообразная для $kf(x)$.

3. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, k и b — числа и $k \neq 0$, то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ — первообразная для $f(kx+b)$.

Например, найдем первообразные.

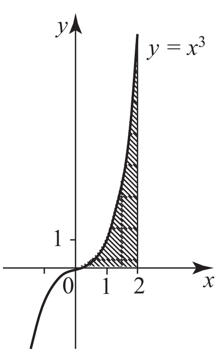
1. $f(x) = \frac{1}{x^2} - \sin x \Rightarrow f(x) = x^{-2} - \sin x$.

$F(x) = \frac{x^{-2+1}}{-1} + \cos x + c = -\frac{1}{x} + \cos x + c$.

2. $f(x) = (2x-3)^5$.

$F(x) = \frac{1}{2}\,\frac{(2x-3)^6}{6} + c = \frac{(2x-3)^6}{12} + c$.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и не меняет знака на этом отрезке. Тогда фигуру, ограниченную графиком этой функции, отрезком $[a; b]$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, называют **криволинейной трапецией**.



Например, $f(x) = x^3$; $x \in [1; 2]$.

Заштрихованная фигура — криволинейная трапеция.

Для вычисления площади криволинейной трапеции применяется формула:

$$S_{\text{тр.}} = F(b) - F(a).$$

В нашем примере $F(x) = \frac{x^4}{4}$; $F(2) = 4$; $F(1) = \frac{1}{4}$; $S_{\text{тр.}} = 4 - \frac{1}{4} = 3\frac{3}{4}$.

Площадь криволинейной трапеции может быть получена так же, как $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, где S_n — сумма площадей n прямоугольников, на которые разбивается криволинейная трапеция. Основания прямоугольников Δx, $\Delta x \to 0$, $n \to \infty$ и $S_n \to S$ (площадь трапеции). Суммирование площадей называется *интегрированием*, а площадь трапеции выражается как интеграл, т. е.

$$S = \int\limits_a^b f(x)\,dx, \quad \text{где} \quad f(x) \geqslant 0, \quad x \in [a; b].$$

$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ — формула Ньютона–Лейбница.

Для удобства используют запись:

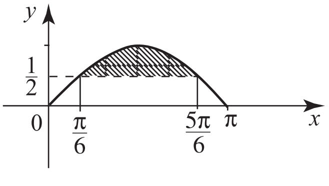
$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Например, $\int\limits_2^5 x^2\,dx = \dfrac{x^3}{3}\Big|_2^5 = \dfrac{125}{3} - \dfrac{8}{3} = \dfrac{117}{3}$.

Вычислим площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = \sin x$, $y = \dfrac{1}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{6}$, $x = \dfrac{5\pi}{6}$.

Сделаем чертеж.

$S = S_1 - S_2$, где S_1 — площадь криволинейной трапеции, ограниченной синусоидой, осью Ox и прямыми $x = \dfrac{\pi}{6}$ и $x = \dfrac{5\pi}{6}$; S_2 — площадь прямоугольника, ограниченного прямыми $y = 0$; $y = \dfrac{1}{2}$; $x = \dfrac{\pi}{6}$; $x = \dfrac{5\pi}{6}$.



$$S_1 = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} =$$

$$= -\cos\frac{5\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\,.$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Ответ: $S = \sqrt{3} - \dfrac{\pi}{3}$.

Функции. Задачи

I. Найти область определения функций.

1. $y = \dfrac{1+x}{3-x}$; $x \neq 3$.

Ответ: $x \in (-\infty; 3) \cup (3; \infty)$.

2. $y = \dfrac{1}{\sin x}$; $\sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq \pi n,\ n \in Z$.

Ответ: $x \in (-\infty; \infty)$; $x \neq \pi n,\ n \in Z$.

3. $y = \log_2(x^2-1)$; $x^2 - 1 > 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) > 0 \Rightarrow x < -1$ и $x > 1$.

Ответ: $x \in (-\infty;\ -1) \cup (1; \infty)$.

4. $y = \sqrt{-x}$; $-x \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 0$.

Ответ: $x \in (-\infty; 0]$.

5. $y = \sqrt{\dfrac{2+x}{2-x}}$; $\dfrac{2+x}{2-x} \geqslant 0 \Rightarrow \dfrac{x+2}{x-2} \leqslant 0$.

Метод интервалов: 

Ответ: $x \in [-2; 2)$.

6. $y = \dfrac{\sqrt{x+2}}{x-3}$;

$$\begin{cases} x + 2 \geqslant 0, \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -2, \\ x \neq 3. \end{cases}$$

Ответ: $x \in [-2; 3) \cup (3; \infty)$.

7. $y = \dfrac{1}{3^x - 3^{-x}}$; $3^x - 3^{-x} \neq 0 \Rightarrow 3^x \neq 3^{-x} \Rightarrow x \neq -x \Rightarrow \Rightarrow 2x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$.

Ответ: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

8. $f(x) = \log_3 x^2$; $x^2 > 0 \Rightarrow x \neq 0$.

Ответ: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

9. $f(x) = \log_x 5$;

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Ответ: $x \in (0; 1) \cup (1; \infty)$.

10. $y = \arcsin 2x$; т. к. $\sin y = 2x$, то $-1 \leqslant 2x \leqslant 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow -\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Ответ: $x \in \left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right]$.

11. $y = \operatorname{ctg} x$; т. к. $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, $\sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq \pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $x \in (-\infty; \infty)$, $x \neq \pi n$, $n \in Z$.

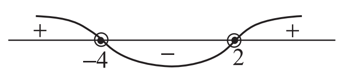
12. $y = \sqrt[4]{x^4 - 1}$; $x^4 - 1 \geqslant 0 \Rightarrow (x^2 + 1)(x^2 - 1) \geqslant 0 \Rightarrow x^2 - 1 \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant -1$ и $x \geqslant 1$.

Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup [1; \infty)$.

13. $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2 - 4x + 3}$; $x^2 - 4x + 3 \neq 0$, если $x^2 - 4x + 3 = 0$, то $x_1 = 1$ и $x_2 = 3 \Rightarrow x \neq 1$ и $x \neq 3$.

Ответ: $x \in (-\infty; 1) \cup (1; 3) \cup (3; \infty)$.

14. $f(x) = \dfrac{3 - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x - 8}}$; $x^2 + 2x - 8 > 0 \Rightarrow (x + 4)(x - 2) > 0$.

Метод интервалов: 

Ответ: $x \in (-\infty; -4) \cup (2; \infty)$.

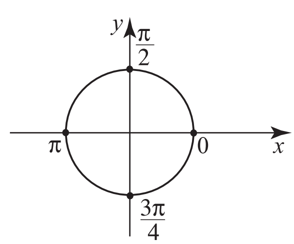
15. $y = \sqrt{2^x - 3^x}$; $2^x - 3^x \geqslant 0 \Rightarrow 2^x \geqslant 3^x \Rightarrow \dfrac{2^x}{3^x} \geqslant 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^x \geqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^0 \Rightarrow x \leqslant 0$.

Ответ: $x \in (-\infty; 0]$.

16. $y = \dfrac{1 - \cos^2 x}{\operatorname{tg}^2 x}$;

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \neq 0, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 0, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pi n,\ n \in Z, \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z. \end{cases}$$



Отметим эти точки на окружности.

$x \neq \dfrac{\pi}{2} n$, $n \in Z$.

Ответ: $x \in (-\infty; \infty)$, $x \neq \dfrac{\pi}{2} n$, $n \in Z$.

17. $y = \arcsin \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$;

$$-1 \leqslant \frac{x^2-3x+2}{x-2} \leqslant 1 \Rightarrow -1 \leqslant \frac{(x-2)(x-1)}{x-2} \leqslant 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \neq 2, \\ -1 \leqslant x-1 \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2, \\ 0 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

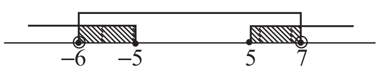
Ответ: $x \in [0; 2)$.

18. $f(x) = \sqrt{x^2-25} + \lg(42+x-x^2)$;

$$\begin{cases} x^2-25 \geqslant 0, \\ 42+x-x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-5)(x+5) \geqslant 0, \\ x^2-x-42 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant -5 \text{ и } x \geqslant 5, \\ (x-7)(x+6) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leqslant -5 \text{ и } x \geqslant 5, \\ -6 < x < 7. \end{cases}$$

Отметим эти интервалы на прямой:



Ответ: $x \in (-6;\ -5] \cup [5; 7)$.

19. $y = \sqrt{\log_2(x^2-3)}$;

$$\begin{cases} x^2-3 > 0, \\ \log_2(x^2-3) \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) > 0, \\ x^2-3 \geqslant 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < -\sqrt{3} \text{ и } x > \sqrt{3}, \\ x \leqslant -2 \text{ и } x \geqslant 2. \end{cases}$$

Ответ: $x \in (-\infty;\ -2] \cup [2; \infty)$.

20. $f(x) = \log_3(1-2\cos x)$;

$1 - 2\cos x > 0 \Rightarrow 2\cos x < 1 \Rightarrow \cos x < \dfrac{1}{2}$.

Если $\cos x = \dfrac{1}{2}$, то $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$. Точка $-\dfrac{\pi}{3}$ на окружности соответствует точке $\dfrac{5\pi}{3}$.

Ответ: $x \in \left(\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n; \dfrac{5\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$.

II. Найти область значений функций.

1. $y = 2\sin x$; $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \Rightarrow -2 \leqslant 2\sin x \leqslant 2$.

Ответ: $y \in [-2; 2]$.

2. $y = \dfrac{1}{\sin^2 x} + \dfrac{1}{\cos^2 x}$; $\dfrac{1}{\sin^2 x} + \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} =$

$$= \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{4}{4\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{4}{\sin^2 2x};$$

$0 \leqslant \sin^2 2x \leqslant 1 \Rightarrow \dfrac{1}{\sin^2 2x} \geqslant 1 \Rightarrow \dfrac{4}{\sin^2 2x} \geqslant 4.$

Ответ: $y \in [4; \infty)$.

3. $y = \sqrt{2 + x - x^2}$; $y \geqslant 0$.

Обозначим $\varphi(x) = -x^2 + x + 2$, это парабола с ветвями, направленными вниз. Вершина параболы имеет координаты: $x_0 = -\dfrac{1}{-2} = \dfrac{1}{2}$; $y_0 = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} + 2 = 2\dfrac{1}{4}$.

$0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \dfrac{9}{4} \Rightarrow 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{3}{2}$.

Ответ: $y \in \left[0; \dfrac{3}{2}\right]$.

4. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$; $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \dfrac{x^2 + 1 - 2}{x^2 + 1} = 1 - \dfrac{2}{x^2 + 1}$.

$\dfrac{2}{x^2 + 1} > 0 \Rightarrow 1 - \dfrac{2}{x^2 + 1} < 1.$

При $x \to \infty$ $\dfrac{2}{x^2 + 1} \to 0 \Rightarrow 1 - \dfrac{2}{x^2 + 1} \to 1.$

$\dfrac{2}{x^2 + 1}$ имеет $\max$, когда $x^2 + 1$ имеет $\min$, т. е. при $x = 0$.

$1 - \dfrac{2}{0 + 1} = -1.$

Ответ: $y \in [-1; 1)$.

5. $y = \log_3(1 - 2\sin x)$;

$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, $-2 \leqslant 2\sin x \leqslant 2$,

$-2 \leqslant -2\sin x \leqslant 2$,

$-1 \leqslant 1 - 2\sin x \leqslant 3$, но $1 - 2\sin x > 0 \Rightarrow 0 < 1 - 2\sin x \leqslant 3 \Rightarrow$ $\Rightarrow \log_3(1 - 2\sin x) \leqslant 1$.

Ответ: $y \in (-\infty; 1]$.

6. $y = 4^{|\cos x|}$; $y > 0$.

$0 \leqslant |\cos x| \leqslant 1 \Rightarrow 1 \leqslant 4^{|\cos x|} \leqslant 4.$

Ответ: $y \in [1; 4]$.

7. $y = 2\sin 5x + 3\cos 5x$;

$2\sin 5x + 3\cos 5x = \sqrt{13}\left(\dfrac{2}{\sqrt{13}}\sin 5x + \dfrac{3}{\sqrt{13}}\cos 5x\right) =$ $= \sqrt{13}(\sin 5x \cos\varphi + \cos 5x \sin\varphi) = \sqrt{13}\sin(5x + \varphi)$, где $\sin\varphi =$ $= \dfrac{3}{\sqrt{13}}$ и $\cos\varphi = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$.

$-1 \leqslant \sin(5x+\varphi) \leqslant 1 \Rightarrow -\sqrt{13} \leqslant \sqrt{13}\sin(5x+\varphi) \leqslant \sqrt{13}$.

Ответ: $y \in [-\sqrt{13}; \sqrt{13}]$.

8. $y = \lg\sqrt{x}$; $\sqrt{x} > 0$.

Ответ: $y \in (-\infty; \infty)$.

9. $y = 3^{|x|+1}$;

$|x| \geqslant 0 \Rightarrow |x|+1 \geqslant 1 \Rightarrow 3^{|x|+1} \geqslant 3$.

Ответ: $y \in [3; \infty)$.

10. $y = x^3 + 2x^2 + 7$.

При $x \to -\infty$ $y \to -\infty$, при $x \to \infty$ $y \to \infty$.

Ответ: $y \in (-\infty; \infty)$.

11. $y = |\sin x + 10\cos x + \pi^2|$;

$$\sin x + 10\cos x = \sqrt{101}\left(\frac{1}{\sqrt{101}}\sin x + \frac{10}{\sqrt{101}}\cos x\right) =$$
$= \sqrt{101}\,(\sin x\cos\varphi + \cos x\sin\varphi) = \sqrt{101}\sin(x+\varphi)$, где $\varphi = \operatorname{arctg} 10$, т. к. $\sin\varphi = \dfrac{10}{\sqrt{101}}$ и $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{101}}$, т. е. $\operatorname{tg}\varphi = 10$.

$-1 \leqslant \sin(x+\varphi) \leqslant 1 \Rightarrow -\sqrt{101} \leqslant \sqrt{101}\sin(x+\varphi) \leqslant \sqrt{101}$.

$0 \leqslant |\sin x + 10\cos x + \pi^2| \leqslant \sqrt{101} + \pi^2$.

Ответ: $y \in [0; \sqrt{101} + \pi^2]$.

12. $y = \dfrac{4x+5}{x-2}$;

$\dfrac{4x+5}{x-2} = \dfrac{4x-8+13}{x-2} = 4 + \dfrac{13}{x-2}$; это гипербола, имеющая $y = 4$ своей асимптотой.

Ответ: $y \in (-\infty; 4) \cup (4; \infty)$.

13. $y = 5^{x^2} \cdot 2^{1-x^2}$;

$5^{x^2} \cdot 2 \cdot 2^{-x^2} = 2\left(\dfrac{5}{2}\right)^{x^2}$; $\left(\dfrac{5}{2}\right)^{x^2} \geqslant 1 \Rightarrow 2\left(\dfrac{5}{2}\right)^{x^2} \geqslant 2$;

$\left(\dfrac{5}{2}\right)^{x^2} \to \infty$ при $x \to \pm\infty$.

Ответ: $y \in (2; \infty)$.

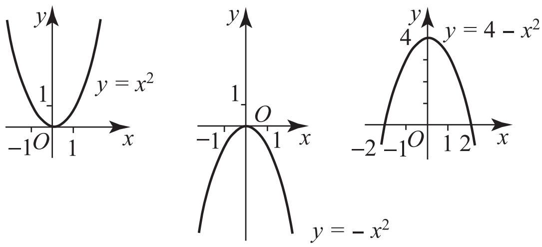
III. Построить графики функций методом преобразования.

1. $y = 4 - x^2$.

а) строим график $y = x^2$;

б) преобразуем его в график $y = -x^2$;

в) сдвигаем $y = -x^2$ на 4 единицы вверх и получаем график $y = 4 - x^2$.

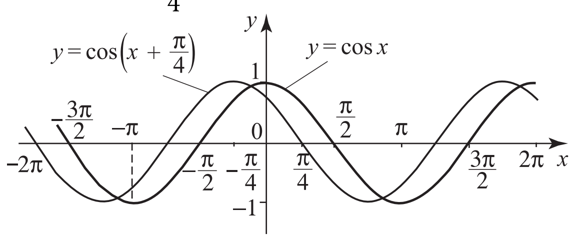


То же можно делать в одной и той же системе координат.

2. $y = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

а) строим график $y = \cos x$;

б) сдвигаем его на $\dfrac{\pi}{4}$ влево.

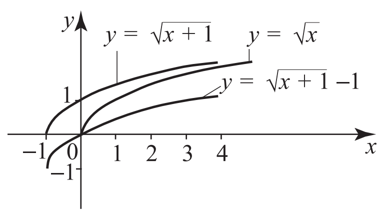


3. $y = \sqrt{x+1} - 1,\ x \geqslant -1$.

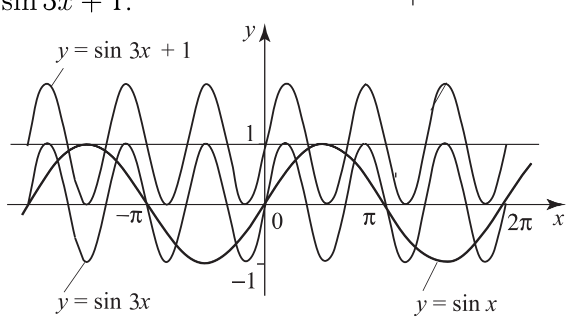
а) строим график $y = \sqrt{x}$;

б) сдвигаем его на 1 влево; $y = \sqrt{x+1}$;

в) сдвигаем график $y = \sqrt{x+1}$ на 1 вниз.

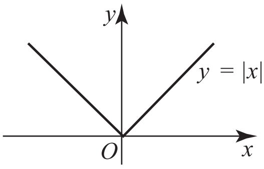


4. $y = \sin 3x + 1$.

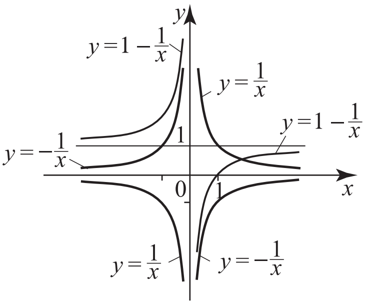


а) $y = \sin x$;
б) $y = \sin 3x$, сжатие 1-го графика в 3 раза вдоль оси x;
в) $y = \sin 3x + 1$, сдвиг на 1 вверх.

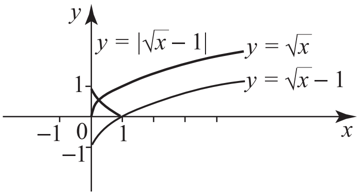
5. $y = |x|$.
По определению модуля
$$\begin{cases} y = x, & \text{если } x \geqslant 0; \\ y = -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$



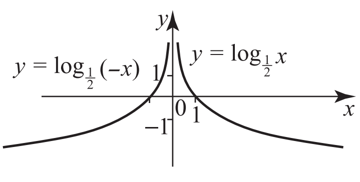
6. $y = \dfrac{x-1}{x}$, $x \neq 0$.
$\dfrac{x-1}{x} = 1 - \dfrac{1}{x}$ — гипербола;
а) $y = \dfrac{1}{x}$; б) $y = -\dfrac{1}{x}$;
в) $y = 1 - \dfrac{1}{x}$.



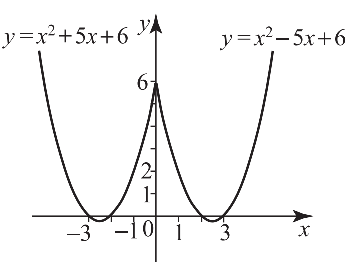
7. $y = |\sqrt{x} - 1|$, $x \geqslant 0$.
а) $y = \sqrt{x}$; б) $y = \sqrt{x} - 1$;
в) $y = |\sqrt{x} - 1|$.



8. $y = \log_{\frac{1}{2}} |x|$, $x \neq 0$.
Функция четная.
а) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $x > 0$;
б) $y = \log_{\frac{1}{2}} (-x)$, $x < 0$.
$y = \log_{\frac{1}{2}} |x|$.



9. $y = x^2 - 5|x| + 6$.
Функция четная.
а) $y = x^2 - 5x + 6$, $x \geqslant 0$;
б) $y = x^2 + 5x + 6$, $x < 0$.
Для 1-го графика: $x_1 = 2$;
$x_2 = 3$; $x_0 = 2\dfrac{1}{2}$; $x_0 = -\dfrac{1}{4}$.
$y = x^2 - 5|x| + 6$.



IV. Какие из следующих функций являются четными? нечетными? не являются ни четными, ни нечетными?

1. $f(x) = \sin x \cos x$.

$f(-x) = \sin(-x)\cos(-x) = -\sin x \cos x = -f(x)$, функция нечетная.

2. $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}$.

$f(-x) = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^3} = -f(x)$, функция нечетная.

3. $y = |\sin 3x|$.

$y(-x) = |\sin(-3x)| = |-\sin 3x| = |\sin 3x| = y(x)$, функция четная.

4. $f(x) = x^4 + 5x^2 - 2$.

$f(-x) = (-x)^4 + 5(-x)^2 - 2 = x^4 + 5x^2 - 2 = f(x)$, функция четная.

5. $y = \dfrac{x^2}{x^4 - 1}\cos x$.

$y(-x) = \dfrac{(-x)^2}{(-x)^4 - 1}\cos(-x) = \dfrac{x^2}{x^4 - 1}\cos x = y(x)$, функция четная.

6. $f(x) = |x| + \cos 3x$.

$f(-x) = |-x| + \cos(-3x) = |x| + \cos 3x = f(x)$, функция четная.

7. $f(x) = \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x}$.

$f(-x) = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1-x} = f(x)$, функция четная.

8. $y(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

$y(-x) = -x - \dfrac{1}{x} = -y(x)$, функция нечетная.

9. $f(x) = 2x + 3$.

$f(-x) = -2x + 3 \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, функция ни четная, ни нечетная.

10. $f(x) = \sin x + \cos x$.

$f(-x) = \sin(-x) + \cos(-x) = -\sin x + \cos x$;

$f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, функция ни четная, ни нечетная.

11. $y(x) = x^2 + x$.

$y(-x) = (-x)^2 - x = x^2 - x$.

$y(-x) \neq y(x)$ и $y(-x) \neq -y(x)$, функция ни четная, ни нечетная.

V. Определить период функций.

1. $y = 3\cos 2x$; $T = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$.

2. $y = \operatorname{tg} 5x$; $T = \dfrac{\pi}{5}$.

3. $y = \sin x + \cos x$.

$$\sin x + \cos x = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\sin\frac{\cancel{x} + \frac{\pi}{2} - \cancel{x}}{2} \times$$

$$\times \cos\frac{x - \frac{\pi}{2} + x}{2} = 2\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

$T = 2\pi$.

4. $y = \cos x \sin x$.

$\cos x \sin x = \dfrac{1}{2} \cdot 2\sin x\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$. $T = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$.

5. $y = 3\cos 2x + 4\sin 2x$.

$$3\cos 2x + 4\sin 2x = 5\left(\frac{3}{2}\cos 2x + \frac{4}{5}\sin 2x\right) = 5(\sin\varphi\cos 2x +$$

$$+ \cos\varphi\sin 2x) = 5\sin(\varphi + 2x).\ T = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

6. $y = \sin^2 x$.

$\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 2x$. $T = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$.

7. $y = \cos x + \cos 2x$.

Функция $y = \cos x$ имеет период $T = 2\pi$;
функция $y = \cos 2x$ имеет период $T = \pi$;
сумма функций имеет больший период $T = 2\pi$.

8. $y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$; $\operatorname{tg} x \geqslant 0$; $\cos x \neq 0$.

Функция $y = \operatorname{tg} x$ и имеет период $T = \pi$, с такой же периодичностью повторяются значения функции $y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$; $T = \pi$.

9. $y = \operatorname{tg} x + \sin 2x$.

Функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \sin 2x$ имеют одинаковые периоды $T = \pi$, функции повторяют свои значения в промежутках $[\pi k; \pi + \pi k)$, поэтому их сумма также имеет период $T = \pi$.

VI. Найти производные функций.

1. $f(x) = x^2 + x^3$; $f'(x) = 2x + 3x^2$.

2. $f(x) = x^3 + \sqrt{x}$; $f'(x) = 3x^2 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

3. $f(x) = x^2(3x + x^3) \Rightarrow f(x) = 3x^3 + x^5$;
$f'(x) = 9x^2 + 5x^4$.

4. $f(x) = (2x - 3)(1 - x^3)$;
$f'(x) = (2x - 3)'(1 - x^3) + (2x - 3)(1 - x^3)' = 2(1 - x^3) + (2x - 3)(-3x^2) = 2 - 2x^3 - 6x^3 + 9x^2 = -8x^3 + 9x^2 + 2$.

5. $y = \dfrac{1 + 2x}{3 - 5x}$;
$$y' = \frac{2(3 - 5x) - (1 + 2x)(-5)}{(3 - 5x)^2} = \frac{6 - \cancel{10x} + 5 + \cancel{10x}}{(3 - 5x)^2} = \frac{11}{(3 - 5x)^2}.$$

6. $f(x) = 3\sin x + 2;\ f'(x) = 3\cos x$.

7. $f(x) = x\sin x;\ f'(x) = \sin x + x\cos x$.

8. $y = \sin x + \cos x;\ y' = \cos x - \sin x$.

9. $y = 2\,\mathrm{tg}\,x - \sin x;\ y' = \dfrac{2}{\cos^2 x} - \cos x$.

10. $y = e^x + 5;\ y' = e^x$.

11. $y = x \cdot 2^x;\ y' = 2^x + x \cdot 2^x \ln 2$.

12. $f(x) = 3^{2x+1};\ f'(x) = 3^{2x+1} \ln 3 \cdot 2$.

13. $f(x) = \sqrt{3 - 2x}\,;\ f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{3 - 2x}}(-2) = -\dfrac{1}{\sqrt{3 - 2x}}$.

14. $f(x) = \dfrac{4}{2 - \cos 3x} \Rightarrow f(x) = 4(2 - \cos 3x)^{-1}$;
$$f'(x) = 4(-(2 - \cos 3x)^{-2})(+\sin 3x) \cdot 3 = -\frac{12\sin 3x}{(2 - \cos 3x)^2}.$$

15. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 + \sin^2 x}{6}} \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1 + \sin^2 x)^{\frac{1}{2}}$;
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{6}}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} \cdot 2\sin x\cos x = \frac{\sin 2x}{2\sqrt{6}\sqrt{1 + \sin^2 x}}.$$

16. $y = \ln(2 + 3x);\ y' = \dfrac{1}{2 + 3x} \cdot 3 = \dfrac{3}{2 + 3x}$.

17. $y = \lg x - \cos x;\ y' = \dfrac{1}{x\ln 10} + \sin x$.

18. $y = x^2 \log_2 x$;
$$y' = 2x\log_2 x + x^2\frac{1}{x\ln 2} = 2x\log_2 x + \frac{x}{\ln 2}.$$

19. $y = e^{x^2} \sin \dfrac{x}{2}$;
$$y' = e^{x^2} 2x \sin \frac{x}{2} + e^{x^2} \cos \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} = e^{x^2}\left(2x\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\right).$$

20. $y = 7^{\frac{x}{2}} \operatorname{tg} 3x$; $y' = 7^{\frac{x}{2}} \ln 7 \cdot \dfrac{1}{2} \operatorname{tg} 3x + 7^{\frac{x}{2}} \dfrac{1}{\cos^2 3x} \cdot 3 =$
$= 7^{\frac{x}{2}} \left(\dfrac{1}{2} \ln 7 \operatorname{tg} 3x + \dfrac{3}{\cos^2 3x}\right)$.

21. $y = \dfrac{3^x}{2^x + 5^x}$;

$$y' = \frac{3^x \ln 3(2^x + 5^x) - 3^x(2^x \ln 2 + 5^x \ln 5)}{(2^x + 5^x)^2} =$$
$$= \frac{2^x 3^x \ln 3 + 3^x 5^x \ln 3 - 2^x 3^x \ln 2 - 3^x 5^x \ln 5}{(2^x + 5^x)^2} =$$
$$= \frac{6^x(\ln 3 - \ln 2) + 15^x(\ln 3 - \ln 5)}{(2^x + 5^x)^2}.$$

22. $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x^2 + 2}$;

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}(x^2 + 2) - e^{-x} \cdot 2x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{-e^{-x}(x^2 - 2x + 2)}{(x^2 + 2)^2}.$$

VII. Касательная к графику функции.

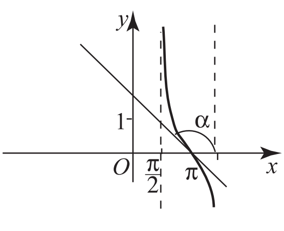
1. Написать уравнение касательной к графику функции в точке x_0. $f(x) = x^2 + 2x$; $x_0 = 1$.

Решение. $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$ — уравнение касательной, где $y_0 = f(x_0)$.

$f(x_0) = 1 + 2 = 3$; $f'(x) = 2x + 2 \Rightarrow f'(x_0) = 4$.

$y = 3 + 4(x - 1) \Rightarrow y = 3 + 4x - 4 \Rightarrow y = 4x - 1$.

Ответ: $y = 4x - 1$.



2. Найти тангенс угла наклона касательной, проходящей через точку A графика функции $f(x) = -\operatorname{tg} x$; $A(\pi; 0)$.

Решение. $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$;

$f'(x) = -\dfrac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow f'(\pi) = -1$.

$\operatorname{tg} \alpha = -1 \Rightarrow \alpha = 135°$.

Ответ: $\alpha = 135°$.

3. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = -2 \sin x$ в точке $x_0 = -\dfrac{\pi}{2}$.

Решение. $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$;

$f(x_0) = -2 \sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$;

$f'(x) = -2 \cos x \Rightarrow f'(x_0) = -2 \cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

$y = 2 + 0(x - x_0) \Rightarrow y = 2.$

Ответ: $y = 2$.

4. Найти точки графика функции $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$, в которых касательная параллельна оси абсцисс.

Решение. Если прямая $\parallel Ox$, то угол между ними равен 0, т. е. $\alpha = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$.

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$; $3x_0^2 - 6x_0 + 3 = 0 \Rightarrow x_0^2 - 2x_0 + 1 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow (x_0 - 1) = 0 \Rightarrow x_0 = 1$. $y_0 = f(x_0) = 1 - 3 + 3 = 1$.

Ответ: точка (1; 1).

5. Под каким углом пересекается с осью Ox график функции $f(x) = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right)$?

Решение. Угол пересечения определяется углом между касательной к графику в точке пересечения и осью Ox.

$\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) = 0 \Rightarrow 2x + \dfrac{\pi}{6} = \pi n,\ n \in Z \Rightarrow 2x = -\dfrac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z \Rightarrow x = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in Z$ — точки пересечения графика с Ox.

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ — уравнение касательной, где $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$ и α — угол наклона касательной к Ox в точке x_0.

$f'(x) = \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) \cdot 2 = 2\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

$f'(x) = 2\cos\left(2\left(-\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{2}\right) + \dfrac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(-\cancel{\dfrac{\pi}{6}} + \pi n + \cancel{\dfrac{\pi}{6}}\right) =$ $= 2\cos(\pi n),\ n \in Z = \pm 2$.

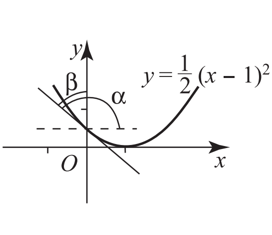
1) $\operatorname{tg}\alpha = 2 \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} 2$;

2) $\operatorname{tg}\alpha = -2 \Rightarrow \alpha = -\operatorname{arctg} 2$.

Ответ: $\alpha = \pm\operatorname{arctg} 2$.

6. Под каким углом пересекается с осью Oy график функции $f(x) = \dfrac{1}{2}(x - 1)^2$?

Решение. График пересекается с Oy в точке $x_0 = 0$; $f(0) = \dfrac{1}{2}$.



α — угол наклона касательной в точке $x_0 = 0$ к Ox, β — угол наклона касательной в этой же точке к Oy; $\beta = \alpha - 90°$.

$\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$; $f'(x) = \dfrac{1}{2} \cdot 2(x - 1) =$ $= x - 1$.

$f'(0) = -1 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = 135°$. $\beta = 135° - 90° = 45°$.

Ответ: $\beta = 45°$.

7. Найти все значения x, при которых касательные к графикам функций $y_1(x) = 3\cos 5x$ и $y_2(x) = 5\cos 3x + 2$ в точках с абсциссой x параллельны.

Решение. Параллельность касательных означает равенство их угловых коэффициентов. Поэтому $y_1'(x) = y_2'(x)$.

$(3\cos 5x)' = (5\cos 3x + 2)' \Rightarrow -15\sin 5x = -15\sin 3x \Rightarrow$ $\Rightarrow \sin 5x - \sin 3x = 0 \Rightarrow 2\sin x\cos 4x = 0$.

1) $\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi n$, $n \in Z$;

2) $\cos 4x = 0 \Rightarrow 4x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi k}{4}$, $k \in Z$.

Ответ: πn, $\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi k}{4}$, $n, k \in Z$.

8. К параболе $y = 4 - x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$ проведена касательная. Найти точку пересечения этой касательной с Oy.

Решение. $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ — уравнение касательной.

$f(x_0) = 4 - 1 = 3$; $f'(x) = -2x \Rightarrow f'(x_0) = -2$.

$y = 3 - 2(x - 1) \Rightarrow y = -2x + 5$.

При пересечении с Oy $x = 0$, $y = 5$.

Ответ: точка (0; 5).

9. Найти координаты точки пересечения двух касательных, проведенных к графику функции $f(x) = \cos \pi x$ в точке с абсциссой $x_1 = \dfrac{1}{6}$ и в точке с абсциссой $x_2 = \dfrac{7}{6}$.

Решение.

1) $y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$; $f(x_1) = \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

$f'(x) = -\sin \pi x \cdot \pi \Rightarrow f'(x_1) = -\sin\dfrac{\pi}{6} \cdot \pi = -\dfrac{\pi}{2}$.

$y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\pi}{2}\left(x - \dfrac{1}{6}\right)$.

2) $y = f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2)$; $f(x_2) = \cos\dfrac{7\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

$f'(x_2) = -\sin\dfrac{7\pi}{6} \cdot \pi = \dfrac{\pi}{2}$. $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\pi}{2}\left(x - \dfrac{7}{6}\right)$.

Точка пересечения принадлежит обеим прямым, поэтому

$\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\pi}{2}\left(x - \dfrac{1}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\pi}{2}\left(x - \dfrac{7}{6}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{3} - \pi x + \frac{\pi}{12} + \frac{7\pi}{12} = 0 \Rightarrow \pi x = \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{\pi} + \frac{2}{3};$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{\pi} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right) = \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{12} = -\frac{\pi}{4}.$$

Ответ: $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\pi} + \dfrac{2}{3};\ -\dfrac{\pi}{4}\right)$.

10. Найти уравнения общих касательных к параболам $y = x^2$ и $y = -x^2 + 3x - 2$.

Решение.

1) Касательная к $y = x^2$ проходит через точку с абсциссой x_1 этой параболы. Уравнение касательной: $y = x_1^2 + 2x_1(x - x_1) = x_1^2 + 2x_1 x - 2x_1^2 = 2x_1 x - x_1^2$.

2) Касательная к $y = -x^2 + 3x - 2$ проходит через точку с абсциссой x_2 этой параболы. Уравнение касательной:

$y = -x_2^2 + 2x_2 - 2 + (-2x_2 + 3)(x - x_2) = -x_2^2 + \cancel{3x_2} - 2 - 2x_2 x + 3x + 2x_2^2 - \cancel{3x_2} = (3 - 2x_2)x + x_2^2 - 2$.

Эти касательные — одна и та же прямая, следовательно их угловые коэффициенты и свободные члены совпадают.

$$\begin{cases} 2x_1 = 3 - 2x_2, \\ -x_1^2 = x_2^2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{3 - 2x_2}{2}, \\ -\dfrac{(3 - 2x_2)^2}{2} = x_2^2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{3 - 2x_2}{2}, \\ -\dfrac{9 - 12x_2 + 4x_2^2}{4} - x_2^2 + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{3 - 2x_2}{2}, \\ -\dfrac{9}{4} + 3x_2 - x_2^2 - x_2^2 + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{3 - 2x_2}{2}, \\ -2x_2^2 + 3x_2 - \dfrac{1}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{3 - 2x_2}{2}, \\ 8x_2^2 - 12x_2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{3 - 2x_2}{2}, \\ x_2 = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{16} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{3 - 2x_2}{2}, \\ x_2 = \dfrac{6 \pm 2}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \text{ и } \dfrac{5}{4}, \\ x_2 = \dfrac{1}{2} \text{ и } \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Уравнения касательной к функции $y = x^2$ в точке с абсциссой x_1: $y = 2x - 1$ и $y = \frac{5}{2}x - \frac{25}{16}$.

Ответ: $y = 2x - 1$; $y = \frac{5}{2}x - \frac{25}{16}$.

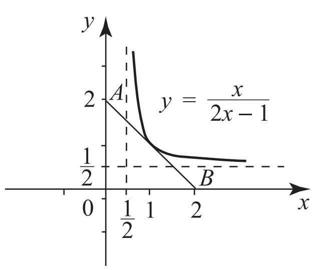
11. Вычислите площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной к графику функции $f(x) = \frac{x}{2x-1}$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Решение. Сделаем схематический чертеж. Функция $y = \frac{x}{2x-1}$ — гипербола, т. к.

$$\frac{x}{2x-1} = \frac{1}{2}\frac{2x}{2x-1} = \frac{1}{2}\frac{2x-1+1}{2x-1} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2x-1}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4x-2}.$$

Эта гипербола имеет асимптоты $x = \frac{1}{2}$ и $y = \frac{1}{2}$.

Т. к. $x_0 = 1$, начертим только одну ветвь гиперболы.



$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ — уравнение касательной.

$f(x_0) = 1$;

$$f'(x) = \frac{2x - 1 - x \cdot 2}{(2x-1)^2} = -\frac{1}{(2x-1)^2} \Rightarrow f'(x_0) = -1.$$

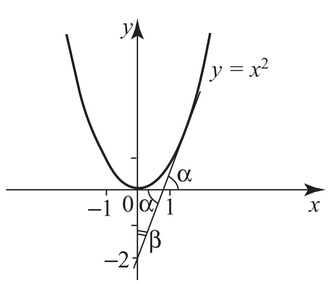
$y = 1 - (x - 1) \Rightarrow y = -x + 2$.

Эта прямая пересекается с Ox при $y = 0$ в точке $x = 2$ и пересекается с Oy при $x = 0$ в точке $y = 2$.

$S_{\triangle OAAB} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$.

Ответ: $S_{\triangle OAB} = 2$.

12. Найти угол между касательными, проведенными из точки $(0;\ -2)$ к параболе $y = x^2$.



Решение. Сделаем чертеж.

$y = x_0^2 + 2x_0(x - x_0)$ — уравнение касательной к графику $y = x^2$ в точке с абсциссой x_0.

$y = x_0^2 + 2x_0x - 2x_0^2 = 2x_0x - x_0^2$.

Эта прямая проходит через точку $(0;\ -2)$, поэтому $-2 = -x_0^2 \Rightarrow x_0 = \pm\sqrt{2}$. Возьмем касательную к правой ветви параболы; $x_0 = \sqrt{2}$ и $\operatorname{tg}\alpha = 2x_0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{2} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$.

$\beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$.

Угол между касательными $2\beta = 180^\circ - 2\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$.

Ответ: $180^\circ - 2\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$.

13. В точке A (1; 8) к графику функции $f(x) = \sqrt{(5 - x^{\frac{2}{3}})^3}$ проведена касательная. Найти длину ее отрезка, заключенного между осями координат.

Решение. Уравнение касательной к графику функции при $x_0 = 1$.

$y = f(1) + f'(1)(x-1)$. $f(1) = \sqrt{4^3} = 8$;

$$f'(x) = ((5 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}})' = \frac{2}{3}(5 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right) = \frac{-\sqrt{5 - x^{\frac{2}{3}}}}{\sqrt[3]{x}};$$

$f'(1) = -2$. $y = 8 - 2(x-1) \Rightarrow y = -2x + 10$.

Прямая $y = -2x + 10$ пересекает ось Ox в точке (5; 0) и ось Oy в точке (0; 10). Расстояние между этими точками:

$h = \sqrt{25 + 100} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$.

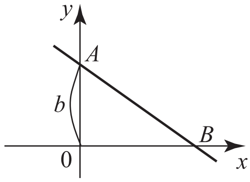
Ответ: $h = 5\sqrt{5}$.

14. Найти уравнения тех касательных к графику функции $y = \dfrac{2x^2 - 1}{x}$, которые вместе с осями координат ограничивают треугольник площади 1.

Решение. Прямая $y = kx + b$ отсекает на осях Ox и Oy следующие отрезки:

при $x = 0$ $y = b$;

при $y = 0$ $x = -\dfrac{b}{k}$, т. е. $\triangle OAB$ имеет катеты $OA = b$ и $OB = \dfrac{b}{k}$.



$S_{\triangle OB} = \dfrac{1}{2}b\dfrac{b}{k} = \dfrac{b^2}{2k}$.

Уравнение касательной

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0$,

$k = f'(x_0)$ и $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0 \Rightarrow S_{\triangle OAB} = \dfrac{(f(x_0) - f'(x_0)x_0)^2}{2f'(x_0)}$.

Т. к. $S_{\triangle OAB} = 1$, то $(f(x_0) - f'(x_0)x_0)^2 = 2f'(x_0)$.

$f(x_0) = \dfrac{2x_0^2 - 1}{x_0}$;

$$f'(x_0) = \frac{4x^2 - 2x^2 + 1}{x^2} = \frac{2x^2+1}{x^2} \Rightarrow f'(x_0) = \frac{2x_0^2+1}{x_0^2}.$$

$$\left(\frac{2x_0^2-1}{x_0} - \frac{2x_0^2+1}{x_0^{\cancel{2}}}\cancel{x_0}\right)^2 = 2\frac{2x_0^2+1}{x_0^2} \Rightarrow \left(\frac{-2}{x_0}\right)^2 = \frac{4x_0^2+2}{x_0^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4}{x_0^2} = \frac{4x_0^2+2}{x_0^2} \Rightarrow 4x_0^2 = 2 \Rightarrow x_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$f(x_0) = \frac{1-1}{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}} = 0;\ f'(x_0) = \frac{1+1}{\frac{1}{2}} = 4.$$

Уравнения касательных: $y = 4x \pm 2\sqrt{2}$.

О т в е т: $y = 4x \pm 2\sqrt{2}$.

VIII. Исследование функций и построение графиков.

1. $f(x) = \dfrac{3x}{1+x^2}$.

1) область определения $f(x)$: $x \in R$;

2) $f(-x) = \dfrac{-3x}{1+x^2} = -f(x)$ — функция нечетная;

3) $f(0) = 0$; $f(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{3x}{1+x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$;

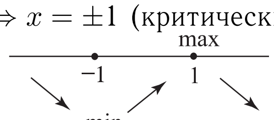
4) $f'(x) = \dfrac{3(1+x^2) - 3x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{3+3x^2-6x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{3-3x^2}{(1+x^2)^2}$;

$f'(x) < 0 \Rightarrow 3 - 3x^2 < 0 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x > 1$ и $x < -1$; функция убывает;

$f'(x) > 0 \Rightarrow 3 - 3x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$; функция возрастает;

5) $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ (критические точки);

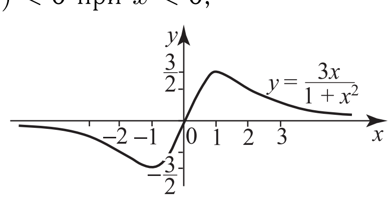
$f(-1) = -\dfrac{3}{2}$; $f(1) = \dfrac{3}{2}$.



6) при $x \to \pm\infty$ $f(x) \to 0$;

$f(x) > 0$ при $x > 0$ и $f(x) < 0$ при $x < 0$;

x	± 2	± 3
y	$\pm\frac{6}{5}$	$\pm\frac{9}{10}$



2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x-1}$.

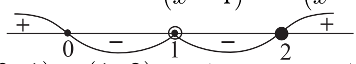
1) $x \in (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$;

2) $f(-x) = \dfrac{x^2+2x+2}{-x-1} \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, функция не обладает свойствами четности и нечетности;

3) $f(0) = -2$; $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + {} + 1 = 0 = (x-1)^2 + 1 = 0$ — корней это уравнение не имеет, и график не пересекает ось Ox;

4) $f'(x) = \dfrac{(2x-2)(x-1) - (x^2-2x+2)}{(x-1)^2} =$

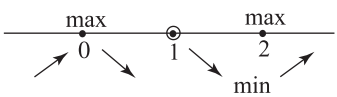
$$= \frac{2x^2 - 2x - \cancel{2x} + 2 - x^2 + \cancel{2x} - 2}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

Метод интервалов: 

$f'(x) < 0$ при $x \in (0;\, 1) \cup (1;\, 2)$ — функция убывает;

$f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty;\, 0) \cup (2;\, \infty)$ — функция возрастает;

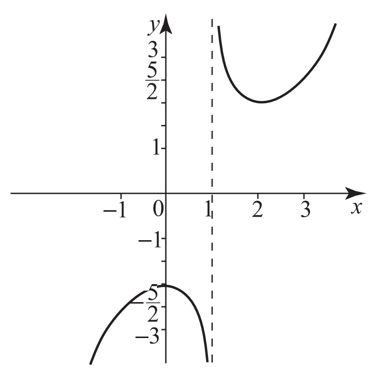
5) $f'(x) = 0$ при $x = 0$ и $x = 2$ — критические точки;



6) $f(x) > 0$ при $x - 1 > 0$, т. к. $x^2 - 2x + 2 > 0 \Rightarrow f(x) > 0$ при $x > 1$ и $f(x) < 0$ при $x < 1$;

$f(x) \to -\infty$ при $x \to -\infty$ и $f(x) \to \infty$ при $x \to \infty$.

x	-1	2	3
y	$-\frac{5}{2}$	2	$\frac{5}{2}$



3. $f(x) = x\sqrt{2-x}$.

1) $2 - x \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 2 \Rightarrow x \in (-\infty;\, 2]$;

2) $f(-x) = -x\sqrt{2+x} \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x) \Rightarrow$ функция не обладает свойствами четности и нечетности;

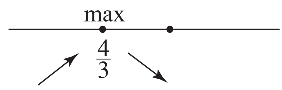
3) $f(0) = 0$; $f(x) = 0 \Rightarrow x\sqrt{2-x} = 0 \Rightarrow x = 0$ и $x = 2$;

4) $f'(x) = \sqrt{2-x} + x\dfrac{-1}{2\sqrt{2-x}} = \dfrac{2(2-x)-x}{2\sqrt{2-x}} = \dfrac{4-3x}{2\sqrt{2-x}}$;

$f'(x) < 0 \Rightarrow 4 - 3x < 0 \Rightarrow 3x > 4 \Rightarrow x > \dfrac{4}{3}$ — функция убывает;

$f'(x) > 0 \Rightarrow x < \dfrac{4}{3}$ — функция возрастает;

5) $f'(x) = 0$ при $x = \dfrac{4}{3}$ — критическая точка.

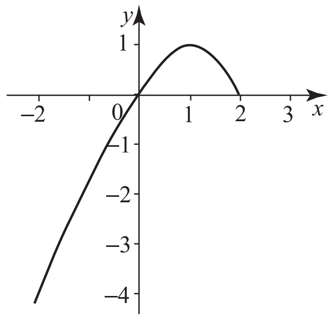


$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}\sqrt{2 - \frac{4}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 1{,}09;$$

6) $f(x) \to -\infty$ при $x \to -\infty$;

$f(x) > 0$ при $x > 0$ и $f(x) < 0$ при $x < 0$.

x	-2	1
y	-4	1



4. $f(x) = \cos^2 x - \cos x$.

1) $x \in R$;

2) можно определить верхнюю границу $f(x)$, т. к. $\cos x \geqslant -1$, то $-\cos x \leqslant 1$ и $\cos^2 x - \cos x \leqslant 2 \Rightarrow f(x) \leqslant 2$;

3) $f(-x) = \cos^2(-x) - \cos(-x) = \cos^2 x - \cos x = f(x) \Rightarrow$ функция четная;

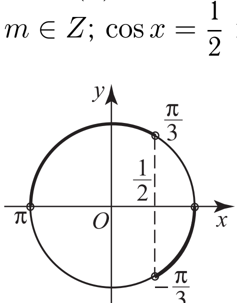
4) функция периодическая с периодом 2π;

5) $f(0) = \cos^2 0 - \cos 0 = 1 - 1 = 0$;

$f(x) = 0 \Rightarrow \cos^2 x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x(\cos x - 1) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \cos x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$; $\cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi k$, $k \in Z$;

6) $f'(x) = -2\cos x \sin x + \sin x = \sin x(1 - 2\cos x)$;

$f'(x) = 0 \Rightarrow \sin x(1 - 2\cos x) = 0 \Rightarrow \sin x = 0$ и $x = \pi m$, $m \in Z$; $\cos x = \dfrac{1}{2}$ и $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi l$, $l \in Z$;



7) $f'(x) > 0 \Rightarrow \sin x(1 - 2\cos x) > 0 \Rightarrow$

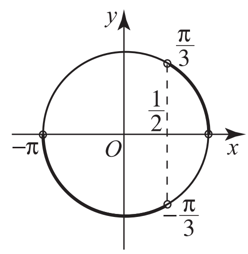
а) $\begin{cases} \sin x > 0, \\ \cos x < \dfrac{1}{2}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sin x < 0, \\ \cos x > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

$x \in \left(\dfrac{\pi}{3}; \pi\right) \cup \left(-\dfrac{\pi}{3}; 0\right)$ — функция возрастает с периодичностью 2π.

$f'(x) < 0 \Rightarrow \sin x(1 - 2\cos x) < 0 \Rightarrow$

а) $\begin{cases} \sin x > 0, \\ \cos x > \dfrac{1}{2}; \end{cases}$

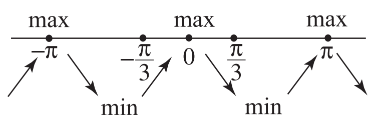


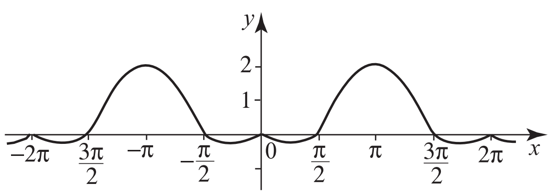
б) $\begin{cases} \sin x < 0, \\ \cos x < \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

$x \in \left(0; \dfrac{\pi}{3}\right) \cup \left(-\dfrac{\pi}{3}; -\pi\right)$ —

функция убывает с периодичностью 2π.

x	$\pm\dfrac{\pi}{3}$
y	$-\dfrac{1}{4}$





5. $f(x) = 3x^2 - x^3$.

1) $x \in R$;

2) $f(-x) = 3x^2 + x^3 \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$ — функция не обладает свойствами четности и нечетности;

3) $f(0) = 0$; $f(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - x^3 = 0 \Rightarrow x^2(3 - x) = 0 \Rightarrow x = 0$ и $x = 3$;

4) $f'(x) = 6x - 3x^2$;

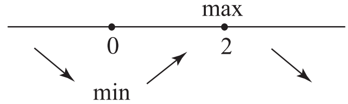
$f'(x) < 0 \Rightarrow 6x - 3x^2 < 0 \Rightarrow 3x(2 - x) < 0 \Rightarrow 3x(x - 2) > 0$;

$f'(x) > 0 \Rightarrow 6x - 3x^2 > 0 \Rightarrow 3x(2 - x) > 0 \Rightarrow 3x(x - 2) < 0$;

Метод интервалов: 

при $x \in (0; 2)$ функция убывает;

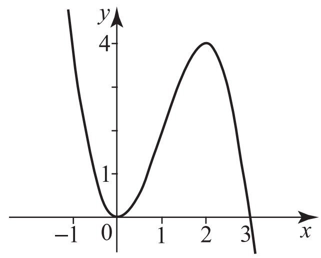
при $x \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$ функция возрастает;

5) $f'(x) = 0$ при $x = 0$ и $x = 2$; 

При $x \to -\infty$ $f(x) \to \infty$;

при $x \to \infty$ $f(x) \to -\infty$.

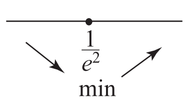
x	-1	1	-2	2
y	4	2	20	4



6. $f(x) = \sqrt{x}\,\ln x$.

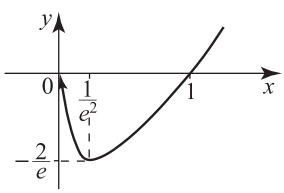
1) $x > 0$ т. е. $x \in (0; \infty)$;
2) $f(-x)$ не существует;
3) $f(0)$ не существует;
$f(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x}\,\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$;
4) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,\ln x + \sqrt{x}\,\dfrac{1}{x} = \dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}$;

$f'(x) < 0 \Rightarrow \dfrac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}} < 0 \Rightarrow \ln x + 2 < 0 \Rightarrow \ln x < -2 \Rightarrow$ $\Rightarrow x < e^{-2}$; $f'(x) > 0 \Rightarrow x > e^{-2}$;



Функция убывает при $x \in \left(0; \dfrac{1}{e^2}\right)$; функция возрастает при

$$x \in \left(\frac{1}{e^2}; \infty\right);$$



5) $f'(x) = 0$ при $x = \dfrac{1}{e^2}$ — критическая точка;

$f\left(\dfrac{1}{e^2}\right) = \dfrac{1}{e}(-2) = -\dfrac{2}{e}$.

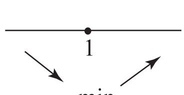
6) $f(x) > 0$ при $x > 1$ и $f(x) < 0$ при $x < 1$; $f(x) \to \infty$ при $x \to \infty$;

7. $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$.

1) $x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$;

2) $f(-x) = \dfrac{e^{-x}}{-x} = -\dfrac{1}{xe^x}$ — функция не является ни четной, ни нечетной;

3) $f(0)$ не существует; $f(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{e^x}{x} = 0$ — уравнение решений не имеет;



4) $f'(x) = \dfrac{e^x x - e^x}{x^2} = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$;

$f'(x) < 0$ при $x < 1$, т. к. $\dfrac{e^x}{x^2} > 0$;

$f'(x) > 0$ при $x > 1$;

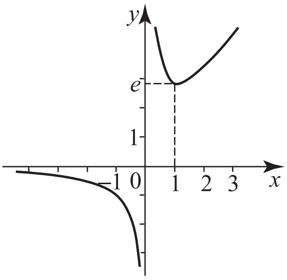
функция убывает при $x \in (-\infty;\ 1)$ и возрастает при $x \in (1;\ \infty)$;

5) $f'(x) = 0$ при $x = 1$; $f(1) = e$;

6) $f(x) > 0$ при $x > 0$; $f(x) < 0$ при $x < 0$;

$f(x) \to 0$ при $x \to -\infty$;

$f(x) \to \infty$ при $x \to \infty$.



x	-1	2
y	$-\frac{1}{e}$	$\frac{e^2}{2}$

8. $f(x) = x^2(x-2)^2$.

1) $x \in R$;

2) $f(x) \geqslant 0$; $f(x) \to \infty$ при $x \to \pm\infty$; $f(x) \in (0;\ \infty)$;

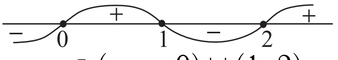
3) $f(-x) = (-x)^2(-x-2)^2 = x^2(x+2)^2$ — функция не является ни четной, ни нечетной.

4) $f(0) = 0$; $f(x) = 0 \Rightarrow x^2(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ и $x = 2$;

5) $f'(x) = 2x(x-2)^2 + x^2 \cdot 2(x-2) = 2x(x^2 - 4x + 4) + 2x^3 - 4x^2 = 2x^3 - 8x^2 + 8x + 2x^3 - 4x^2 = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 4x(x^2 - 3x + 2) = 4x(x-1)(x-2)$;

$f'(x) < 0 \Rightarrow 4x(x-1)(x-2) < 0$;

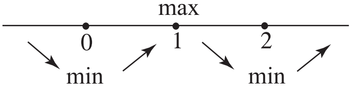
$f'(x) > 0 \Rightarrow 4x(x-1)(x-2) > 0$;

Метод интервалов: 

Функция убывает при $x \in (-\infty;\ 0) \cup (1;\ 2)$,

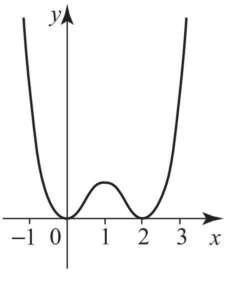
функция возрастает при $x \in (0;\ 1) \cup (2;\ \infty)$;

6) $f'(x) = 0$ при $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ — критические точки;



$f(1) = 1$.

x	-1	3
y	9	9



9. $f(x) = \dfrac{8}{x} + \dfrac{x}{2}$.

1) $x \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ \infty)$;

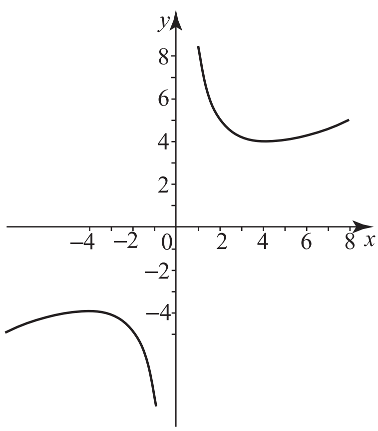
2) $f(-x) = -\dfrac{8}{x} - \dfrac{x}{2} = -f(x)$ — функция нечетная;

3) $f(0)$ — не существует; $f(x)=0 \Rightarrow \dfrac{8}{x}+\dfrac{x}{2}=0 \Rightarrow \dfrac{16+x^2}{2x}=$ $=0$ — уравнение решений не имеет, функция не пересекает ось Ox;

4) $f'(x)=-\dfrac{8}{x^2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{x^2-16}{2x^2}$;

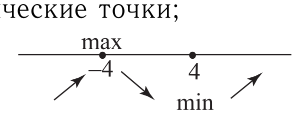
$f'(x)<0 \Rightarrow x^2-16<0 \Rightarrow -4<x<4$;

$f'(x)>0 \Rightarrow x^2-16>0 \Rightarrow x<-4$ и $x>4$;



функция убывает при $x \in (-4;\,4)$; функция возрастает при $x \in (-\infty;\,-4) \cup (4;\,\infty)$;

5) $f'(x)=0 \Rightarrow x=\pm 4$ — критические точки;



6)

x	± 1	± 2	± 4	± 8
y	$\pm 8\frac{1}{2}$	± 5	± 4	± 5

$f(x) \to \pm\infty$ при $x \to 0$.

$f(x)>0$ при $x>0$ и $f(x)<0$ при $x<0$.

IX. Наибольшее и наименьшее значения функции.

1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на данном промежутке.

$f(x)=2\sin x+\cos 2x$; $x \in [0;\,2\pi]$.

Решение. Найдем критические точки:

$f'(x)=2\cos x-2\sin 2x$;

$f'(x)=0 \Rightarrow 2\cos x-4\sin x\cos x=0 \Rightarrow 2\cos x(1-2\sin x)=$ $=0 \Rightarrow \cos x=0$ и $\sin x=\dfrac{1}{2}$.

1) $\cos x=0 \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n \in Z$; на отрезке $[0;\,2\pi]$ $x=\dfrac{\pi}{2}$ и $x=\dfrac{3\pi}{2}$;

2) $\sin x=\dfrac{1}{2} \Rightarrow x=(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ k \in Z$; на отрезке $[0;\,2\pi]$ $x=\dfrac{\pi}{6}$ и $x=\dfrac{5\pi}{6}$; получили 4 критических точки.

Найдем значения функции в критических точках и на концах отрезка.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)$	1	$1\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	-3	1

О т в е т: $\min\limits_{[0;\,2\pi]} f(x) = -3$; $\max\limits_{[0;\,2\pi]} f(x) = 1\frac{1}{2}$.

2. Число 24 представьте в виде суммы двух неотрицательных слагаемых так, чтобы сумма квадратов этих чисел была наименьшей.

Р е ш е н и е. Пусть $24 = x + y$; $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $y = 24 - x$; по условию $x^2 + (24 - x)^2$ — min, т. е. задача сводится к нахождению наименьшего значения этой функции и того значения x, при котором достигается минимум.

$f(x) = x^2 + (24 - x)^2$ на отрезке $[0; 24]$.

$f(x) = x^2 + 576 - 48x + x^2 = 2x^2 - 48x + 576$;

$f'(x) = 4x - 48$; $f'(x) = 0 \Rightarrow 4x - 48 = 0 \Rightarrow x = 12$ — критическая точка;

x	0	12	24
$f(x)$	576	288	576

т. е. $\min\limits_{[0;\,24]} f(x) = 288$; $x_{\min} = 12$.

О т в е т: $24 = 12 + 12$.

3. Найти число, которое превышало бы свой утроенный квадрат на максимальное значение.

Р е ш е н и е. Обозначим искомое число x, тогда выражение $(x - 3x^2)$ должно быть максимальным. Нужно найти x, при котором функция $f(x) = x - 3x^2$ принимает максимальное значение; это парабола, которая имеет max в вершине;

$f'(x) = 1 - 3x$; $f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - 6x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{6}$.

О т в е т: число $\frac{1}{6}$.

4. Каковы должны быть стороны прямоугольного участка, периметр которого 120 м, чтобы площадь этого участка была наибольшей?

Р е ш е н и е. Пусть стороны участка a и b, тогда $2a + 2b = 120 \Rightarrow a + b = 60$; $b = 60 - a$.

Площадь прямоугольника $S_{\text{пр.}} = ab$, т. е. для $f(a) = a(60 - a)$ нужно найти значение a, при котором функция принимает наибольшее значение;

$f(a) = 60a - a^2$; $f'(a) = 60 - 2a$;

$f'(a) = 0 \Rightarrow 60 - 2a = 0 \Rightarrow a = 30$ (м), $b = 60 - 30 = 30$ (м).

Ответ: 30 м и 30 м.

5. Число 54 представьте в виде суммы трех положительных слагаемых, два из которых пропорциональны числам 1 и 2, таким образом, чтобы произведение всех слагаемых было наибольшим.

Решение. Пусть 1-е число — x, 2-е число — $2x$, 3-е число — y, тогда

$x + 2x + y = 54 \Rightarrow 3x + y = 54 \Rightarrow y = 54 - 3x$.

$f(x) = x \cdot 2x(54 - 3x) = 108x^2 - 6x^3$; эта функция должна иметь наибольшее значение на отрезке $[0; 54]$.

$f'(x) = 216x - 18x^2$; $f'(x) = 0 \Rightarrow 216x - 18x^2 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow 18x(12 - x) = 0 \Rightarrow x = 0$ и $x = 12$. $x_{\max} = 12$.

Ответ: $54 = 12 + 24 + 18$.

6. Найти наименьшее значение функции $f(x) = \dfrac{x}{3} + \dfrac{3}{x}$ на отрезке $[1; 4]$.

Решение. $f'(x) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{3}{x^2}$; $f'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{3} - \dfrac{3}{x^2} = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \dfrac{x^2 - 9}{3x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 3$ — критические точки.

$x = -3$ не принадлежит отрезку $[1; 4]$.

x	1	3	4
$f(x)$	$3\frac{1}{3}$	2	$2\frac{1}{12}$

Ответ: $\min\limits_{[1;\,4]} f(x) = 2$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - 72x + 90$ на отрезке $[-5; 5]$.

Решение. $f'(x) = 3x^2 + 6x - 72$; $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x - 72 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 24 = 0 \Rightarrow x_1 = -6$ и $x_2 = 4$ — критические точки.

$x = -6$ не принадлежит $[-5; 5]$.

x	-5	4	5
$f(x)$	400	-86	-70

Ответ: $\min\limits_{[-5;\,5]} f(x) = -86$; $\max\limits_{[-5;\,5]} f(x) = 400$.

8. Найти наименьшее значение функции $f(x) = x + \ln \dfrac{1}{x - 2}$ при $x > 2$.

Решение. $f'(x) = 1 + (x-2)\left(-\frac{1}{(x-2)^2}\right) = 1 - \frac{1}{x-2} = \frac{x-3}{x-2}$; $f'(x) = 0$ при $x = 3$. $f(3) = 3 + \ln 1 = 3$.

Ответ: $\min\limits_{x>2} f(x) = 3$.

9. Найти наибольшее значение функции $f(x) = |x^3 + 6x^2 + 9x + 1|$ на отрезке $[-3;\,1]$.

Решение. Обозначим $\varphi(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 1$, $x \in [-3;\,1]$;
$\varphi'(x) = 3x^2 + 12x + 9 = 3(x^2 + 4x + 3) = 3(x+3)(x+1)$,
$\varphi'(x) = 0 \Rightarrow (x+3)(x+1) = 0 \Rightarrow x = -3$ и $x = -1$.
Но $x = -3$ — левая граница отрезка $\Rightarrow x = -1$.

x	-3	-1	1
$\varphi(x)$	1	-3	17

$\min\limits_{[-3;\,1]} \varphi(x) = -3$; $\max\limits_{[-3;\,1]} \varphi(x) = 17$.

1) Если $\varphi(x) \geqslant 0$, то $\varphi(x) \leqslant 17$; $f(x) = |\varphi(x)| = \varphi(x) \leqslant 17$;

2) Если $\varphi(x) < 0$, то $\varphi(x) \geqslant -3$; $f(x) = |\varphi(x)| = -\varphi(x) \leqslant 3 < 17$.

Поэтому $\max\limits_{[-3;\,1]} f(x) = 17$.

Ответ: $\max\limits_{[-3;\,1]} f(x) = 17$.

X. Первообразная и интеграл.

1. Найти общий вид первообразных для функции $f(x) = x + \cos x$.

Ответ: $F(x) = \frac{x^2}{2} + \sin x + c$.

2. Для функции $f(x) = \frac{1}{x^2}$ найти первообразную $F(x)$ такую, что $F\left(\frac{1}{x}\right) = -12$.

Решение.
$F(x) = -\frac{1}{x} + c$; $-12 = -2 + c \Rightarrow c = -10$; $F(x) = -\frac{1}{x} - 10$.

Ответ: $F(x) = -\frac{1}{x} - 10$.

3. Для функции $f(x) = 2\cos x$ найти первообразную, график которой проходит через точку с координатами $\left(-\frac{\pi}{2};\,1\right)$.

Решение. $F(x) = 2\sin x + c$;
$1 = 2\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + c \Rightarrow 1 = -2 + c \Rightarrow c = 3$.
Ответ: $F(x) = 2\sin x + 3$.

4. Найти общий вид первообразных для функции $f(x) = 3\sin 2x$.

Ответ: $F(x) = -\dfrac{3}{2}\cos 2x + c$.

5. Вычислить интегралы:

а) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{2} x^4\,dx = \frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{2} = \frac{32}{5} + \frac{1}{5} = \frac{33}{5}$.

б) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{(2x+1)^2} = -\frac{1}{2(2x+1)}\Big|_{1}^{2} = -\frac{1}{4x+2}\Big|_{1}^{2} = -\frac{1}{10} + \frac{1}{6} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$.

в) $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$.

г) $\displaystyle\int\limits_{0}^{3\pi} \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{9}} = 9\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{9}\Big|_{0}^{3\pi} = 9\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{3} = 9\sqrt{3}$.

д) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{2\pi}{3}} \left(\sin\frac{x}{4} + \cos\frac{x}{4}\right)^2 dx =$

$$= \int\limits_{0}^{\frac{2\pi}{3}} \left(\sin^2\frac{x}{4} + \cos^2\frac{x}{4} + 2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}\right) dx = \int\limits_{0}^{\frac{2\pi}{3}} \left(1 + \sin\frac{x}{2}\right) dx =$$

$$= x\Big|_{0}^{\frac{2\pi}{3}} + 2\cos\frac{x}{2}\Big|_{0}^{\frac{2\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3} + 1 - 2 = \frac{2\pi}{3} - 1.$$

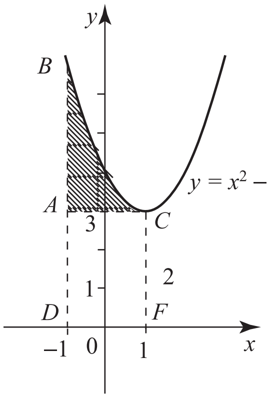
Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями (6–13).

6. $y = x^2 - 2x + 4$, $y = 3$, $x = -1$.

Решение. Сделаем рисунок.
$y = x^2 - 2x + 4$ — парабола;
$x^2 - 2x + 4 = x^2 - 2x + 1 + 3 = (x-1)^2 + 3$ — не имеет корней, т. к. $(x-1)^2 + 3 \neq 0$;
$x_0 = -\dfrac{-2}{2} = 1$; $y_0 = 3$. $y(0) = 4$; $y(-1) = 7$.

Нужно вычислить площадь криволинейного треугольника ABC.

$S_{ABC} = S_{DBCF} - S_{DACF}$;

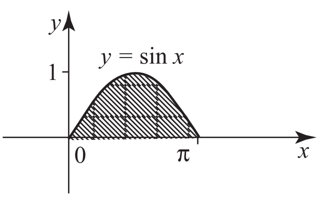


$S_{DBCF} = \int\limits_{-1}^{1} (x^2 - 2x + 4)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + 4x\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} - x^2\Big|_{-1}^{1} + 4x\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \cancel{1} + \cancel{1} + 4 + 4 = 8\frac{2}{3}$;

$S_{DACF} = 3 \cdot 2 = 6$; $S_{ABC} = 8\frac{2}{3} - 6 = 2\frac{2}{3}$.

О т в е т: $S_{ABC} = 2\frac{2}{3}$.

7. $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$.



Р е ш е н и е.

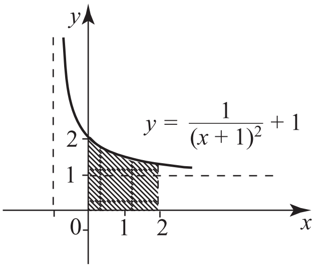
$S = \int\limits_0^{\pi} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = 1 + 1 = 2.$

О т в е т: $S = 2$.

8. $y = \frac{1}{(x+1)^2} + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$.

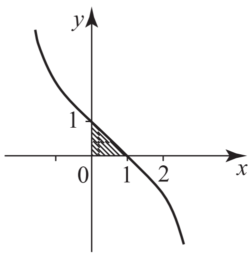
Р е ш е н и е.

График $y = \frac{1}{(x+1)^2} + 1$ — гипербола; $x \neq -1$; $y > 0$; $x = -1$ и $y = 1$ — Нужно найти площадь заштрихованной фигуры.



$S = \int\limits_0^2 \left(\frac{1}{(x+1)^2} + 1\right) dx = \left(-\frac{1}{x+1} + x\right)\Big|_0^2 = -\frac{1}{3} + 2 + 1 - 0 = 2\frac{2}{3}.$

О т в е т: $S = 2\frac{2}{3}$.



9. $y = -(x-1)^3$, $y = 0$, $x = 0$.

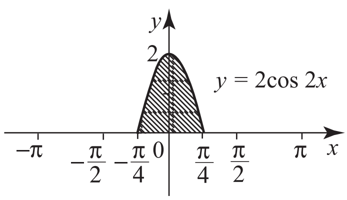
Решение. График функции $y = -(x-1)^3$ — кубическая парабола.

$$S = \int_0^1 (-(x-1)^3)\,dx = \int_0^1 (1-x)^3\,dx =$$

$$= -\frac{(1-x)^4}{4}\bigg|_0^1 = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Ответ: $S = \frac{1}{4}$.

10. $y = 2\cos 2x$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$.



Решение.

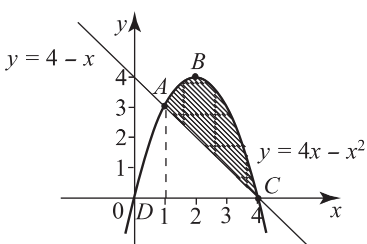
$$S = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2\cos 2x\,dx = 2\sin 2x \times$$

$$\times \frac{1}{2}\bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \sin 2x\bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 1 + 1 = 2.$$

Ответ: $S = 2$.

11. $y = 4 - x$, $y = 4x - x^2$.

Решение. График $y = 4 - x$ — прямая линия, проходящая через точки (0; 4) и (4; 0). График $y = 4x - x^2$ — парабола с ветвями, направленными вниз, пересекающая Ox в точках: $x = 0$ и $x = 4$, координаты вершины (2; 4).



Найдем координаты точки A — точки пересечения графиков. Для этого решим уравнение: $4 - x = 4x - x^2 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ и $x_2 = 4$.

Точка A имеет координаты (1; 3).

$S_{ABC} = S_{DABC} - S_{\triangle DAC} \Rightarrow$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \int_1^4 (4x - x^2)\,dx - \int_1^4 (4-x)\,dx = 4\frac{x^2}{2}\bigg|_1^4 - \frac{x^3}{3}\bigg|_1^4 - 4x\bigg|_1^4 +$$

$$+ \frac{x^2}{2}\bigg|_1^4 = 32 - 2 - \frac{64}{3} + \frac{1}{3} - 16 + 4 + 8 - \frac{1}{2} = 30 - 21 - 12 + 7\frac{1}{2} =$$

$$= 4\frac{1}{2}.$$

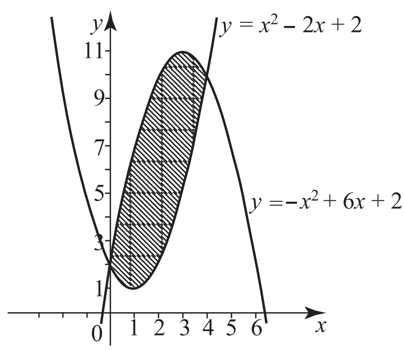
Ответ: $S = 4\frac{1}{2}$

12. $y = x^2 - 2x + 2$, $y = 2 + 6x - x^2$.

Решение. График $y = x^2 - 2x + 2$ — парабола, не имеющая точек пересечения с Ox, т. к. $D < 0$; координаты вершины: $x_0 = 1$; $y_0 = 1$, ветви направлены вверх.

График $y = -x^2 + 6x + 2$ — парабола с ветвями, направленными вниз, пересекающая ось Ox в точках $x_{1,\,2} = 3 \pm \sqrt{11}$ ($x_1 \approx -0{,}3$; $x_2 \approx 6{,}3$), $x_0 = 3$; $y_0 = 11$.

Найдем точки пересечения графиков; для этого решим уравнение $x^2 - 2x + 2 = 2 + 6x - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 8x = 0 \Rightarrow 2x(x - 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ и $x_2 = 4$; $y_1 = 2$; $y_2 = 10$.



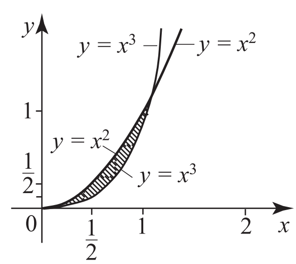
Площадь заштрихованной фигуры $S = S_1 - S_2$, где S_1 — площадь криволинейной трапеции под кривой $y = -x^2 + 6x + 2$; S_2 — площадь криволинейной трапеции под кривой $y = x^2 - 2x + 2$.

$$S = \int\limits_0^4 (-x^2 + 6x + 2)\,dx - \int\limits_0^4 (x^2 - 2x + 2)\,dx =$$

$$= -\frac{x^3}{3}\Big|_0^4 + 6\frac{x^2}{2}\Big|_0^4 + 2x\Big|_0^4 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^4 + 2\frac{x^2}{2}\Big|_0^4 - 2x\Big|_0^4 = -\frac{64}{3} + 48 + \cancel{8} - \frac{64}{3} + 16 - \cancel{8} = 64 - \frac{128}{3} = \frac{64}{3}.$$

Ответ: $S = 21\frac{1}{3}$.

13. $y = x^2$; $y = x^3$.



Решение.

Точки пересечения кривых:
$x^2 = x^3 \Rightarrow x^2 - x^3 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 \times (1 - x) = 0 \Rightarrow x = 0$ и $x = 1$.

При $0 < x < 1$ $x^3 < x^2$, поэтому кривая $y = x^3$ находится ниже кривой $y = x^2$ при $0 < x < 1$.

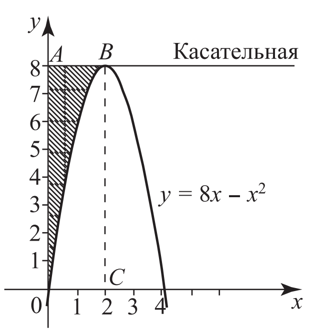
$$S = \int_0^1 x^2\,dx - \int_0^1 x^3\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Ответ: $S = \dfrac{1}{12}$.

14. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = 8x - 2x^2$, касательной к этому графику в его вершине и прямой $x = 0$.

Решение. График функции $y = 8x - 2x^2$ — парабола с ветвями, направленными вниз, пересекающая ось Ox в точках $x = 0$ и $x = 4$, с вершиной: $x_0 = 2$, $y_0 = 8$.

В вершине эта парабола достигает точки максимума, поэтому $f'(x_{\text{в}}) = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$, т. е. касательная параллельна оси Ox.



$S_{OAB} = S_{OABC} - S_{OBC}$.

$S_{OABC} = OA \cdot OC$, т. к. $OABC$ — прямоугольник.

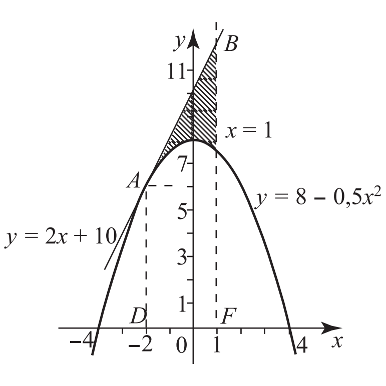
$$S_{OAB} = 8 \cdot 2 - \int_0^2 (8x - 2x^2)\,dx =$$

$$= 16 - 8\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 + 2\frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \cancel{16} - \cancel{16} + \frac{16}{3} =$$

$$= \frac{16}{3}.$$

Ответ: $S = 5\frac{1}{3}$.

15. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x) = 8 - 0{,}5x^2$, касательной к нему в точке с абсциссой $x = -2$ и прямой $x = 1$.



Решение. График $f(x)$ — парабола, ветви параболы направлены вниз, она пересекает ось Ox при $x = \pm 4$, вершина в точке $(0;\ 8)$. Уравнение касательной в точке $x_0 = -2$

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$; $f(-2) = 6$;

$f'(x) = -x \Rightarrow f'(-2) = 2$.

$y = 6 + 2(x + 2) \Rightarrow y = 2x + 10$ — касательная.

Площадь заштрихованной фигуры $S_{ABC} = S_{DABF} - S_{DACF}$.

$S_{ABC} = \int\limits_{-2}^{1} (2x + 10)\,dx - \int\limits_{-2}^{1} (8 - 0{,}5x^2)\,dx = 2\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{1} + 10x\Big|_{-2}^{1} - 8x\Big|_{-2}^{1} + 0{,}5\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{1} = 1 - 4 + 10 + 20 - 8 - 16 + \frac{1}{6} + \frac{4}{3} = 27 - 24 + \frac{3}{2} = 4\frac{1}{2}$.

Ответ: $S = 4\frac{1}{2}$.

Задания повышенной сложности

1. Число a подобрано так, что уравнение $\sqrt{x-\sqrt{3}}+a^2x^2+2ax(\sqrt{6}-\sqrt{3})=6\sqrt{2}-9$ имеет решение. Найти это решение и значение a.

Решение.

$\sqrt{x-\sqrt{3}}=a^2x^2+2ax(\sqrt{6}-\sqrt{3})+(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2=0;$

$a^2x^2+2ax(\sqrt{6}-\sqrt{3})+(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2=-\sqrt{x-\sqrt{3}};$

$(ax+(\sqrt{6}-\sqrt{3}))^2=-\sqrt{x-\sqrt{3}};$

$(ax+(\sqrt{6}-\sqrt{3}))^2\geqslant 0;\ -\sqrt{x-\sqrt{3}}\leqslant 0\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}ax+\sqrt{6}-\sqrt{3}=0,\\ x-\sqrt{3}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\sqrt{3},\\ a\sqrt{3}=\sqrt{3}(1-\sqrt{2})\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\sqrt{3},\\ a=1-\sqrt{2}.\end{cases}$$

Ответ: $a=1-\sqrt{2}$; $x=\sqrt{3}$.

2. Найти все значения a, при которых существует единственная пара целых чисел x, y, удовлетворяющая условиям: $3x^2+11xy+10y^2=7$, $x+y>0$, $4a^2x-3ay<0$.

Решение. Разложим на множители:

$$3x^2+11xy+10y^2=y^2\left(3\left(\frac{x}{y}\right)^2+11\frac{x}{y}+10\right)=$$
$$=y^2(3t^2+11t+10),\ \text{где}\ t=\frac{x}{y};$$

$$3t^2+11t+10=0\Rightarrow t_{1,2}=\frac{-11\pm\sqrt{121-120}}{6}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow t_{1,2}=\frac{-11\pm 1}{6}\Rightarrow t_1=-2\ \text{и}\ t_2=-\frac{5}{3}\Rightarrow 3t^2+11t+10=$$
$$=(t+2)(3t+5).$$

$$y^2\left(\frac{x}{y}+2\right)\left(3\frac{x}{y}+5\right)=\cancel{y^2}\frac{x+2y}{\cancel{y}}\frac{3x+5y}{\cancel{y}}=(x+2y)(3x+5y).$$

$(x+2y)(3x+5y)=7$ — произведение двух целых чисел равно 7 в случаях, когда скобки равны ± 1 и ± 7.

$$1)\ -\left\{\begin{array}{l}x+2y=1,\\ 3x+5y=7\end{array}\right|\cdot 3\quad\Leftrightarrow\begin{cases}y=-4,\\ x=9;\end{cases}\quad x+y=5>0;$$

2) $-\left\{\begin{array}{l} x+2y=7, \\ 3x+5y=1 \end{array}\right| \cdot 3 \quad \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=20, \\ x=-33; \end{array}\right. \quad x+y=-13<0;$

3) $-\left\{\begin{array}{l} x+2y=-1, \\ 3x+5y=-7 \end{array}\right| \cdot 3 \quad \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=4, \\ x=-9; \end{array}\right. \quad x+y=-5<0;$

4) $-\left\{\begin{array}{l} x+2y=-7, \\ 3x+5y=-1 \end{array}\right| \cdot 3 \quad \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-20, \\ x=33; \end{array}\right. \quad x+y=13>0;$

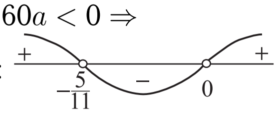
Подходят 1-й и 4-й ответы.

1) $4a^2 \cdot 9 - 3a \cdot (-4) < 0 \Rightarrow 36a^2 + 12a < 0 \Rightarrow 12a(3a+1) < 0;$

метод интервалов: 

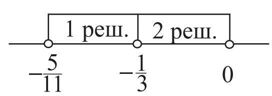
$a \in \left(-\frac{1}{3}; 0\right).$

2) $4a^2 \cdot 3 - 3a(-20) < 0 \Rightarrow 132a^2 + 60a < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 12a(11a+5) < 0$; метод интервалов: 

$a \in \left(-\frac{5}{11}; 0\right).$

Одно решение при $a \in \left(-\frac{5}{11};\ -\frac{1}{3}\right]$.



О т в е т: $a \in \left(-\frac{5}{11};\ -\frac{1}{3}\right]$.

3. Найти все значения c, при которых уравнение $7\sin x + 3\cos x = c$ имеет решение.

Р е ш е н и е. Используем метод вспомогательного аргумента:

$$7\sin x + 3\cos x = \sqrt{58}\left(\frac{7}{\sqrt{58}}\sin x + \frac{3}{\sqrt{58}}\cos x\right) =$$

$= \sqrt{58}(\sin x\cos\varphi + \cos x\sin\varphi) = \sqrt{58}\sin(x+\varphi)$, где $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{3}{7}$;

$\sin\varphi = \frac{3}{\sqrt{58}}$; $\cos\varphi = \frac{7}{\sqrt{58}}$.

$-1 \leqslant \sin(x+\varphi) \leqslant 1 \Rightarrow -\sqrt{58} \leqslant \sqrt{58}\sin(x+\varphi) \leqslant \sqrt{58}$.

О т в е т: $c \in [-\sqrt{58}; \sqrt{58}]$.

4. Найти все значения a, удовлетворяющие условию $-1 < a < 1$, при которых выражение $1 + 2\sqrt{x^2 - 2axy + y^2 - 6y + 10}$ принимает минимальное значение точно для одной пары x, y.

Р е ш е н и е. Выражение минимально, когда $x^2 - 2axy + y^2 - 6y + 10 = 0$; решим это уравнение относительно $x \Rightarrow x_{1,2} = ay \pm \sqrt{a^2y^2 - y^2 + 6y - 10}$; x должен быть единственным $\Rightarrow$ $\Rightarrow a^2y^2 - y^2 + 6y - 10 = 0 \Rightarrow (a^2-1)y^2 + 6y - 10 = 0$.

Из условия $a^2 - 1 < 0$.

Чтобы y был единственным, соответствующая парабола должна снизу касаться оси Ox.

$y_{1,\,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 + 10(a^2 - 1)}}{a^2 - 1} \Rightarrow 10^2 - 1 = 0 \Rightarrow a = \pm\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Ответ: $a = \pm\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

5. Для каждого значения a решить уравнение: $\dfrac{a}{2a - x} = 3$.

Решение.

$\dfrac{a}{2a - x} = 3 \Rightarrow \dfrac{a - 6a + 3x}{2a - x} = 0 \Rightarrow \dfrac{3x - 5a}{x - 2a} = 0$;

$\begin{cases} 3x = 5a, \\ x \neq 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{3}a; \\ x \neq 2a \end{cases} \dfrac{5}{3}a \neq 2a \Rightarrow a \neq 0.$

Ответ: при $a \neq 0$ $x = \dfrac{5a}{3}$, при $a = 0$ — решений нет.

6. Для каждого значения a решить уравнение:
$\dfrac{2a^2 + x^2 - 6a}{a^3 - x^3} + \dfrac{2x}{ax + a^2 + x^2} - \dfrac{1}{x - a} = 0.$

Решение.

$\dfrac{2a^2 + x^2 - 6a}{a^3 - x^3} + \dfrac{2x}{a^2 + ax + x^2} + \dfrac{1}{a - x} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{2a^2 + \cancel{x^2} - 6a = 2ax - \cancel{2x^2} + a^2 + ax + \cancel{x^2}}{a^3 - x^3} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{3a^2 + 3ax - 6a}{a^3 - x^3} = 0 \Rightarrow \dfrac{3a(a + x - 2)}{a^3 - x^3} = 0 \Rightarrow$

1) $\begin{cases} a + x - 2 = 0, \\ a^3 - x^3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - a, \\ a \neq x. \end{cases} \quad 2 - a \neq a \Rightarrow a \neq 1;$

2) при $a = 0$ x — любое, кроме 0.

Ответ: при $a \neq 0$ и $a \neq 1$ $x = 2 - a$; при $a = 0$ $x \in (-\infty; 0) \cup$
$\cup\, (0; \infty)$; при $a = 1$ решений нет.

7. Для каждого значения a решить уравнение: $\sqrt[4]{a - x}\, -$
$-\, \sqrt[4]{a + x} = 2x$.

Решение.

$+\begin{cases} a - x \geqslant 0, \\ a + x \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow 2a \geqslant 0 \Rightarrow a \geqslant 0.$

Подбор: $x = 0$ $\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{a} = 0$; $x > 0$, $a - x < a$, $a + x > a \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt[4]{a - x} - \sqrt[4]{a + x} < 0$, но $2x > 0 \Rightarrow x > 0$ не может быть;

$x < 0$, $a - x > 0$, $a + x < a \Rightarrow \sqrt[4]{a-x} - \sqrt[4]{a+x} > 0$, но $2x < < 0 \Rightarrow x < 0$ не может быть.

Ответ: $x = 0$ при $a \geqslant 0$; при $a < 0$ $\varnothing$.

8. Найти все значения a, при которых решения уравнения $2|x - a| + a - 4 + x = 0$ принадлежат отрезку $[0; 4]$.

Решение.

1) $x - a \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant a$. $2x - 2a + a - 4 + x = 0 \Rightarrow 3x = a + 4 \Rightarrow \Rightarrow x = \dfrac{a+4}{3}$;

$x \geqslant a \Rightarrow \dfrac{a+4}{3} \geqslant a \Rightarrow a + 4 \geqslant 3a \Rightarrow 2a \leqslant 4 \Rightarrow a \leqslant 2$.

$0 \leqslant x \leqslant 4 \Rightarrow a \leqslant \dfrac{a+4}{3} \leqslant 4 \Rightarrow 0 \leqslant a + 4 \leqslant 12 \Rightarrow -4 \leqslant a \leqslant 8$; $-4 \leqslant a \leqslant 2$.

2) $x - 2 < 0 \Rightarrow x < a$. $-2x + 2a + a - 4 + x = 0 \Rightarrow x = 3a - 4$.

$x < a \Rightarrow 3a - 4 < a \Rightarrow a < 2$.

$0 \leqslant x \leqslant 4 \Rightarrow 0 \leqslant 3a - 4 \leqslant 4 \Rightarrow \dfrac{4}{3} \leqslant a \Leftrightarrow \dfrac{8}{3}$; $\dfrac{4}{3} \leqslant a < 2$.

Ответ: $a \in [-4; 2]$.

9. Для каждого значения a решить уравнение
$|x + 3| - a|x - 1| = 4$.

Решение.

1) $\begin{cases} x + 3 \geqslant 0, \\ x - 1 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow x \geqslant 1$.

$x + 3 - ax + a - 4 = 0 \Rightarrow x(1 - a) = 1 - a$; при $a \neq 1$ $x = 1$; при $a = 1$ $x \in [1; \infty)$.

2) $\begin{cases} x + 3 \geqslant 0, \\ x - 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow -3 \leqslant x < 1$.

$x + 3 + ax - a - 4 = 0 \Rightarrow x(1 + a) = 1 + a$; при $a \neq -1$ $x = 1$; при $a = -1$ $x \in [-3; 1)$.

3) $\begin{cases} x + 3 < 0, \\ x - 1 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow$ система несовместна.

4) $\begin{cases} x + 3 < 0, \\ x - 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow x < -3$.

$-x - 3 + ax - a - 4 = 0 \Rightarrow x(a - 1) = 7 + a \Rightarrow x = \dfrac{7+a}{a-1}$; $a \neq 1$, т. к. $0 \neq 8$.

$x < -3 \Rightarrow \dfrac{7+a}{a-1} < -3 \Rightarrow \dfrac{4a+4}{a-1} < 0 \Rightarrow \dfrac{a+1}{a-1} < 0 \Rightarrow \Rightarrow -1 < a < 1$.

Ответ: $x \in [1;\infty)$ при $a=1$; $x\in[-3;\,1)$ при $a=-1$; $x=1$ и $x=\dfrac{7+a}{a-1}$ при $a\in(-1;\,1)$; $x=1$ при $a\in(-\infty;\,-1)\cup(1;\,\infty)$.

10. Для каждого значения a решить уравнение $\dfrac{a-2}{\sqrt{x+4}}=1$.

Решение.

$x+4>0\Rightarrow x>-4$.

$$\begin{cases} a-2=\sqrt{x+4}\,, \\ a>2, \\ x>-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-4a+\cancel{4}=x+\cancel{4}, \\ a>2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=a^2-4a, \\ a>2. \end{cases}$$

Ответ: $x=a^2-4a$ при $a\in(2;\,\infty)$, при $a\in(-\infty;\,2]$ решений нет.

11. Найти все значения a, при которых уравнение $\log_3(9^x+9a^3)=x$ имеет два решения.

Решение.

$\log_3(9^x+9a^3)=x\Rightarrow 9^x+9a^3=3^x$; $3^x=y>0$; $y^2-y+9a^3=$ $=0\Rightarrow y_{1,\,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1-36a^3}}{2}$.

Чтобы это уравнение имело два решения, необходимо, чтобы $1-36a^3>0\Rightarrow 36a^3<1\Rightarrow a<\dfrac{1}{\sqrt[3]{36}}$.

$y_1=\dfrac{1-\sqrt{1-36a^3}}{2}$ и $y_2=\dfrac{1+\sqrt{1-36a^3}}{2}$, $y_2>0$ при всех $a<\dfrac{1}{\sqrt[3]{36}}$; $\dfrac{1-\sqrt{1-36a^3}}{2}>0\Rightarrow\sqrt{1-36a^3}<1\Rightarrow 36a^3>0\Rightarrow$ $\Rightarrow a>0$.

Ответ: $a\in\left(0;\,\dfrac{1}{\sqrt[3]{36}}\right)$.

12. Решить уравнение для каждого значения a: $4^x-2a(a+1)2^{x-1}+a^3=0$.

Решение.

$2^x=y>0$; $y^2-a(a+1)y+a^3=0\Rightarrow$

$$\Rightarrow y_{1,\,2}=\frac{a(a+1)\pm\sqrt{a^2(a+1)^2-4a^3}}{2}\Rightarrow$$

$\Rightarrow y_{1,\,2} = \dfrac{a(a+1) \pm \sqrt{a^4 - 2a^3 + a^2}}{2} \Rightarrow y_{1,\,2} = \dfrac{a(a+1) \pm a(a-1)}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow y_1 = \dfrac{a^2 + \cancel{a} + a^2 - \cancel{a}}{2} = a^2$ и $y_2 = \dfrac{\cancel{a^2} + a - \cancel{a^2} + a}{2} = a.$

1) $2^x = a$; $a > 0$; $x = \log_2 a$;

2) $2^x = a^2$; $a \neq 0$; $x = 2\log_2 a$ при $a > 0$; $x = 2\log_2(-a)$ при $a < 0$.

Ответ: при $a > 0$ $x = \log_2 a$ и $x = 2\log_2 a$; при $a = 0$ решений нет; при $a < 0$ $x = 2\log_2(-a)$.

13. Для каждого значения a определить число решений уравнения $\sqrt{2|x| - x^2} = a$.

Решение.

1) $a \geqslant 0$; при $a < 0$ решений нет.

2) $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ \sqrt{2x - x^2} = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ 2x - x^2 = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x^2 - 2x + a^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x_{1,\,2} = 1 \pm \sqrt{1 - a^2}; \end{cases}$

$1 + \sqrt{1 - a^2} > 0$ при всех a;
$1 - \sqrt{1 - a^2} \geqslant 0 \Rightarrow a^2 \geqslant 0$ при всех a.
При $a = 1$ — одно решение;
при $a > 1$ — нет решений, т. к. $1 - a^2 < 0$;
при $a < 1$ — 2 решения.

3) $\begin{cases} x < 0, \\ \sqrt{-2x - x^2} = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ -2x - x^2 = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ x^2 + 2x + a^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ x_{1,\,2} = -1 \pm \sqrt{1 - a^2}; \end{cases}$

$-1 - \sqrt{1 - a^2} < 0$ при всех a;
$-1 + \sqrt{1 - a^2} < 0 \Rightarrow a^2 > 0$ при всех a, кроме $a = 0$.
При $a = 0$ и $a = 1$ — одно решение;
при $a > 1$ — нет решений;
при $0 < a < 1$ — два решения.

Ответ: при $a \in (0;\,1)$ — 4 решения; при $a = 0$ — 3 решения; при $a = 1$ — 2 решения; при $a \in (-\infty;\,0) \cup (1;\,\infty)$ нет решений.

14. Для каждого неотрицательного a решить неравенство: $a^3x^4 + 6a^2x^2 - x + 9a + 3 \geqslant 0$.

Решение.

$a \geqslant 0$; $a(a^2x^4 + 6ax^2 + 9) - x + 3 \geqslant 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow a(ax^2 + 3)^2 - x + 3 \geqslant 0 \Rightarrow a(ax^2 + 3)^2 - ax^2 + ax^2 - x + {}$
${} + 3 \geqslant 0 \Rightarrow a((ax^2 + 3)^2 - x^2) + (ax^2 - x + 3) \geqslant 0 \Rightarrow a(ax^2 - x +$

$+ 3)(ax^2 + x + 3) + (ax^2 - x + 3) \geqslant 0 \Rightarrow (ax^2 - x + 3)(a^2x^2 + ax +$ $+ 3a + 1) \geqslant 0.$

1) $\begin{cases} ax^2 - x + 3 \geqslant 0, \\ a^2x^2 + ax + 3a + 1 \geqslant 0. \end{cases}$

Решаем 1-е неравенство: $x_{1,\,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-12a}}{2a}$; неравенство выполняется при $D \leqslant 0$, т. е. $1 - 12a \leqslant 0 \Rightarrow a \geqslant \dfrac{1}{12}$ при всех x; при $a = \dfrac{1}{12}$ $x = \dfrac{1}{2a}$ неравенство выполняется; при $0 \leqslant a < \dfrac{1}{12}$ $x \leqslant \dfrac{1-\sqrt{1-12a}}{2a}$ и $x \geqslant \dfrac{1+\sqrt{1-12a}}{2a}$; при $a = 0$ $x \leqslant 3$.

2) $\begin{cases} ax^2 - x + 3 \leqslant 0, \\ a^2x^2 + ax + 3a + 1 \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leqslant ax^2 + 3, \\ a^2x^2 + ax + 3a + 1 \leqslant 0; \end{cases}$
система не имеет решений, т. к. $x > 0$ и 2-е неравенство не выполняется.

Ответ: при $a = 0$ $x \in (-\infty;\, 3]$; при $a \in \left(0;\, \dfrac{1}{12}\right)$ $x \in$ $\in \left(-\infty;\, \dfrac{1-\sqrt{1-12a}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{1-12a}}{2a};\, \infty\right)$; при $a \in \left[\dfrac{1}{12};\, \infty\right)$ $x \in (-\infty;\, \infty)$.

15. Для каждого значения a решить неравенство: $|x - a| \geqslant x - 1$.

Решение.

1) $x \geqslant a$; $x - a \geqslant x - 1 \Rightarrow -a \geqslant -1 \Rightarrow a \leqslant 1$; x — любое;
2) $x < a$; $a - x \geqslant x - 1 \Rightarrow 2x \leqslant a + 1 \Rightarrow x \leqslant \dfrac{a+1}{2}$.

Ответ: при $a \in (-\infty;\, 1]$ $x \in (-\infty;\, \infty)$; при $a \in (1;\, \infty)$ $x \in$ $\in \left(-\infty;\, \dfrac{a+1}{2}\right]$.

16. При каких значениях a неравенство $\dfrac{x^2 - ax - 2}{x^2 - 3x + 4} > -1$ выполняется для всех x?

Решение.
$$\frac{x^2 - ax - 2}{x^2 - 3x + 4} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{x^2 - ax - 2 + x^2 - 3x + 4}{x^2 - 3x + 4} > 0 \Rightarrow$$
$\Rightarrow \dfrac{2x^2 - (3+a)x + 2}{x^2 - 3x + 4} > 0$; $x^2 - 3x + 4 > 0$ при всех x,
т. к. $D = 9 - 16 < 0$; $2x^2 - (3+a)x + 2 > 0$;

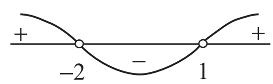
$x_{1,\,2}=\dfrac{3+a\pm\sqrt{a^2+6a-7}}{4}$; для всех x неравенство выполняется, если $a^2+6a-7<0 \Rightarrow (a-1)(a+7)<0 \Rightarrow -7<a<1$.

Ответ: $a\in(-7;\,1)$.

17. Найти все значения a, при которых решение уравнения $10x-15a=13-5ax+2a$ меньше 2.

Решение.

$10x-15a=13-5ax+2a \Rightarrow 10x+5ax=13+15a+2a \Rightarrow$ $\Rightarrow (10+5a)x=13+17a \Rightarrow x=\dfrac{13+17a}{10+5a}$ при $a\neq-2$; при $a=-2$ решений нет; $\dfrac{13+17a}{10+5a}>2 \Rightarrow \dfrac{13+17a-20-10a}{10+5a}>0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \dfrac{7(a-1)}{5(a+2)}>0 \Rightarrow \dfrac{(a-1)}{(a+2)}>0$; метод интервалов:



$a<-2$ и $a>1$.

Ответ: $a\in(-\infty;\,-2)\cup(1;\,\infty)$.

18. Для каждого натурального значения n решить неравенство: $(x+3)^n<(x-5)^n$.

Решение.

1) n— нечетное; $x+3<x-5 \Rightarrow 3<-5$, невозможно. $x\in\varnothing$.

2) n — четное; $|x+3|<|x-5|$;

а) $x\geqslant5$; $x+3<x-5$; $\varnothing$.

б) $-3<x<5$; $x+3<5-x \Rightarrow x<1$; $-3<x<1$.

в) $x\leqslant-3$; $-x-3<5-x \Rightarrow -3<5$ — выполняется всегда.

Ответ: при $n=2k+1$ (нечетном) $x\in\varnothing$; при $n=2k$ (четном) $x\in(-\infty;\,1)$.

19. Для каждого значения a решить неравенство $a\sqrt{x+1}<1$.

Решение.

$a\sqrt{x+1}<1$; $x+1\geqslant0 \Rightarrow x\geqslant-1$;

1) $a\leqslant0$, неравенство выполняется при всех $x\geqslant-1$;

2) $\begin{cases} a>0; \\ x\geqslant-1, \\ a^2(x+1)<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0, \\ x\geqslant-1, \\ a^2x<1-a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0, \\ x\geqslant-1, \\ x<1+\dfrac{1}{a^2}. \end{cases}$

Ответ: при $a\in(-\infty;\,0)$ $x\in[-1;\,\infty)$; при $a\in(0;\,\infty)$ $x\in\left[-1;\,-1+\dfrac{1}{a^2}\right)$.

20. Число a подобрано так, что неравенство $\log_a(x^2 - x - 2) > \log_a(-x^2 + 2x + 3)$ имеет решение $\dfrac{9}{4}$. Решить это неравенство.

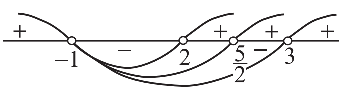
Решение.

1) $a > 1$;

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 > -x^2 + 2x + 3, \\ x^2 - x - 2 > 0, \\ -x^2 + 2x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x - 5 > 0, \\ x^2 - x - 2 > 0, \\ x^2 - 2x - 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(2x-5) > 0, \\ (x+1)(x-2) > 0, \\ (x+1)(x-3) < 0. \end{cases}$$

Метод интервалов:



$\dfrac{5}{2} < x < 3$, но в этот интервал не входит $\dfrac{9}{4} = 2\dfrac{1}{4}$.

2) $a < 1$;

$$\begin{cases} (x+1)(2x-5) < 0, \\ (x+1)(x-2) > 0, \\ (x+1)(x-3) < 0; \end{cases}$$

$2 < x < \dfrac{5}{2}$; $\dfrac{9}{4}$ входит в этот интервал.

Ответ: $x \in \left(2; 2\dfrac{1}{2}\right)$, $a < 1$.

21. Найти все значения a, при которых уравнение имеет четыре решения: $\log_3 x^2 = \sqrt{\log_3 x^8} + a$.

Решение.

$\log_3 x^2 = \sqrt{\log_3 x^8} + a$; $x \neq 0$; $\log_3 x^8 \geqslant 0 \Rightarrow x^8 \geqslant 1 \Rightarrow \Rightarrow |x| \geqslant 1 \Rightarrow \log_3 x^2 \geqslant 0$.

$\log_3 x^2 = 2\sqrt{\log_3 x^2} + a$; $\sqrt{\log_3 x^2} = y \geqslant 0$.

$y^2 - 2y - a = 0$, если $y = 0$, то $x = \pm 1$ — два решения $\Rightarrow \Rightarrow y > 0$.

$y_{1,\,2} = 1 \pm \sqrt{1 + a}$; $1 + a \geqslant 0 \Rightarrow a \geqslant -1$; если $1 + a = 0$, то $y = 1$ и $x = \pm\sqrt{3}$ — два решения $\Rightarrow a > -1$.

$1 \pm \sqrt{1 + a} > 0$; $1 + \sqrt{1 + a} > 0$ всегда; $1 - \sqrt{1 + a} > 0 \Rightarrow \Rightarrow 1 + a < 1 \Rightarrow a < 0$.

Четыре решения при $a \in (-1; 0)$.

Ответ: $a \in (-1; 0)$.

22. Указать все значения a, при которых уравнение $\log_2 x + \log_a x + \log_4 x = 1$ имеет решения. Найти эти решения.

Решение.

$\log_2 x + \log_a x + \log_4 x = 1$; $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.

$$\log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 a} + \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = 1 \Rightarrow \log_2 x\left(1 + \frac{1}{\log_2 a} + \frac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 x\left(\frac{1}{\log_2 a} + \frac{3}{2}\right) = 1 \Rightarrow \log_2 x = \frac{2\log_2 a}{3\log_2 a + 2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 2^{\frac{2\log_2 a}{3\log_2 a + 2}}$; решение существует, если $3\log_2 a + 2 \neq 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow a \neq 2^{-\frac{2}{3}}$.

Ответ: $a \in (0;\, 2^{-\frac{2}{3}}) \cup (2^{-\frac{2}{3}};\, 1) \cup (1;\, \infty)$; $x = 2^{\frac{2\log_2 a}{3\log_2 a + 2}}$.

23. Указать все целые значения k, при которых уравнение $5 - 4\sin^2 x - 8\cos^2 \frac{x}{2} = 3k$ имеет решения. Найти эти решения.

Решение.

$$5 - 4\sin^2 x - 8\cos^2 \frac{x}{2} = 3k \Rightarrow 1 + 4(1 - \sin^2 x) -$$

$$- \cancel{8}^{4}\,\frac{1 + \cos x}{\cancel{2}} = 3k \Rightarrow 4\cos^2 x - 4\cos x - 3 - 3k = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12 + 12k}}{4} = \frac{2 \pm 2\sqrt{4 + 3k}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{4 + 3k}}{2}.$$

Уравнение имеет решения, если $4 + 3k \geqslant 0 \Rightarrow k \geqslant -\frac{4}{3}$, или т. к. k — целое, $k \geqslant -1$; $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \Rightarrow$

1) $\frac{1 + \sqrt{4 + 3k}}{2} \leqslant 1 \Rightarrow 4 + 3k \leqslant 1 \Rightarrow k \leqslant -1$;

$\frac{1 + \sqrt{4 + 3k}}{2} \geqslant -1$ выполняется, т. к. $1 + \sqrt{4 + 3k} > 0$.

Итак, $k = -1$; $\cos x = \frac{1 + 1}{2} \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi n$, $n \in Z$.

2) $\frac{1 - \sqrt{4 + 3k}}{2} \leqslant 1 \Rightarrow \sqrt{4 + 3k} \geqslant -1$, выполняется при всех $k \geqslant -1$;

$\frac{1 - \sqrt{4 + 3k}}{2} \geqslant -1 \Rightarrow \sqrt{4 + 3k} \leqslant 3 \Rightarrow k \leqslant \frac{5}{3}$; т. к. k — целое, то $k \leqslant 1$.

Итак, $k = -1;\ 0;\ 1$.

При $k = 0$ $\cos x = -\frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$;

при $k = -1$ $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in Z$;

при $k=1$ $\cos x = \dfrac{1-\sqrt{7}}{2}$, $x = \pm\arccos\dfrac{1-\sqrt{7}}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Ответ: при $k=-1$ $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi m$; $2\pi n$, m, $n \in Z$; при $k=0$ $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$; при $k=1$ $x = \pm\arccos\dfrac{1-\sqrt{7}}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$.

24. Найти все значения α, при которых уравнение имеет единственное решение: $x^2 + \dfrac{6x}{\sqrt{\sin\alpha}} + \dfrac{9\sqrt{3}}{\cos\alpha} + 36 = 0$.

Решение.

$$x^2 + \frac{6x}{\sqrt{\sin\alpha}} + \frac{9\sqrt{3}}{\cos\alpha} + 36 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,\,2} = \frac{-3}{\sqrt{\sin\alpha}} \pm \sqrt{\frac{9}{\sin\alpha} - \frac{9\sqrt{3}}{\cos\alpha} - 36};\ \sin\alpha > 0;\ \cos\alpha \neq 0.$$

Уравнение имеет одно решение, если $D = 0$.

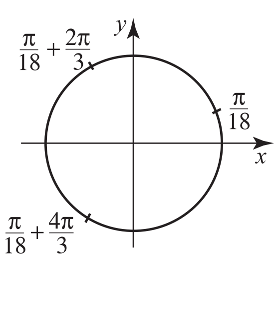
$$\frac{9}{\sin\alpha} - \frac{9\sqrt{3}}{\cos\alpha} - 36 = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sin\alpha} - \frac{\sqrt{3}}{\cos\alpha} - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha - 4\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha -$$

$$- 2\sin\alpha\cos\alpha = 0 \Rightarrow \sin\frac{\pi}{6}\cos\alpha - \cos\frac{\pi}{6}\sin\alpha - \sin 2\alpha = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) - \sin 2\alpha = 0 \Rightarrow 2\sin\frac{\frac{\pi}{6} - \alpha - 2\alpha}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{6} - \alpha + 2\alpha}{2} =$$

$$= 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{12} - \frac{3\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\alpha}{2}\right) = 0.$$



1) $\sin\left(\dfrac{\pi}{12} - \dfrac{3\alpha}{2}\right) = 0 \Rightarrow \dfrac{\pi}{12} - \dfrac{3\alpha}{2} = \pi n$, $n \in Z \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{2}{3}\pi n$, $n \in Z$; $\sin\alpha > 0$.

Точка в III-й четверти не подходит; $\alpha = \dfrac{\pi}{18} + 2\pi n$, $\alpha = \dfrac{13\pi}{18} + 2\pi m$, n, $m \in Z$.

2) $\cos\left(\dfrac{\pi}{12} - \dfrac{\alpha}{2}\right) = 0 \Rightarrow \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z \Rightarrow \alpha = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k$; $\sin\alpha > 0$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{18} + 2\pi n$; $\dfrac{13\pi}{18} + 2\pi m$; $\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k$, n, m, $k \in Z$.

25. Найти все значения a, при которых любое решение системы $\begin{cases} x+y=a, \\ 2x-y=3 \end{cases}$ удовлетворяет неравенству $x>y$.

Решение.

$$+\begin{cases} x+y=a, \\ 2x-y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{a+3}{3}, \\ y=\dfrac{2a-3}{3}. \end{cases}$$

$$x>y \Rightarrow \frac{a+3}{3} > \frac{2a-3}{3} \Rightarrow a+3>2a-3 \Rightarrow a<6.$$

Ответ: $a \in (-\infty; 6)$.

26. Указать все значения a, при которых система имеет решения. Найти эти решения:

$$\begin{cases} 2\cos x + a\sin y = 1, \\ \log_z \sin y = \log_z a \log_a (2-3\cos x), \\ \log_a z + \log_a \left(\dfrac{1}{2a}-1\right) = 0. \end{cases}$$

Решение.

1) $\log_a z + \log_a \left(\dfrac{1}{2a}-1\right) = 0 \Rightarrow \log_a \left(z\dfrac{1-2a}{2a}\right) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow z\dfrac{1-2a}{2a} = 1 \Rightarrow z = \dfrac{2a}{1-2a}$;

2) $\log_z \sin y = \log_z a \log_a (2-3\cos x) \Rightarrow \sin y = 2-3\cos x \Rightarrow$
$\Rightarrow 3\cos x + \sin y = 2$;

3) $$\begin{cases} 2\cos x + a\sin y = 1, \\ 3\cos x + \sin y = 2 \end{cases} \Bigg| \cdot a \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{1-2a}{2-3a}, \\ \sin y = 2-3\cos x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{1-2a}{2-3a}, \\ \sin y = \dfrac{1}{2-3a}. \end{cases}$$

Ограничения:

1) $z>0 \Rightarrow \dfrac{2a}{1-2a} > 0 \Rightarrow \dfrac{2a}{2a-1} < 0 \Rightarrow 0<a<\dfrac{1}{2}$;

2) $z \neq 1 \Rightarrow \dfrac{2a}{1-2a} \neq 1 \Rightarrow 2a \neq 1-2a \Rightarrow a \neq \dfrac{1}{4}$;

3) $\sin y > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{2-3a} > 0 \Rightarrow a < \dfrac{2}{3}$; $\sin y \leqslant 1 \Rightarrow \dfrac{1}{2-3a} \leqslant 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow a \leqslant \dfrac{1}{3}$;

4) $2-3\cos x>0$ выполняется, т. к. $\sin y=2-3\cos x>0$;

5) $\cos x\leqslant 1\Rightarrow \dfrac{1-2a}{2-3a}\leqslant 1\Rightarrow a\leqslant 1$. $\cos x=\dfrac{2-\sin y}{3}>0$.

Ответ: при $a\in\left(0;\,\dfrac{1}{4}\right)\cup\left(\dfrac{1}{4};\,\dfrac{1}{3}\right]$ $\left(\pm\arccos\dfrac{1-2a}{2-3a}+2\pi n;\,(-1)^m\arcsin\dfrac{1}{2-3a}+\pi m;\,\dfrac{2a}{1-2a}\right)$, $n,\,m\in Z$.

Предметный указатель